Математички факултет
Универзитет у Београду

Интерактивни наставни материјали о интегралима креирани коришћењем програмског пакета GeoGebra

мастер рад

Ментор:
доц. др Мирослав Марић

Студент:
Драгана Николић
1031/2012

Београд,
2014.

МЕНТОР:	доц. др Мирослав Марић
ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:	проф. др Небојша Лажетић проф. др Милош Арсеновић доц. др Мирослав Марић

Садржај

1 Увод

Калкулусни рачун, односно рад са изводима и интегралима, почео је свој развој веома давно, још у доба старе Грчке. Архимед и Еудокс спадају у прве математичаре који су се бавили израчунавањем површина методом за коју ће се касније испоставити да је калкулус. Из потребе за рачунањем површина и запремина, калкулусом се баве и многи математичари ван европског континента. Међутим, до коначног заснивања калкулуса долази тек након 17. века и радова Њутна и Лајбница. Долази до успостављања везе између диференцирања и интеграције, као и формалног заснивања, примене интеграла, пре свега у геометрији: рачунањем површина, дужина лука криве и запремина.

Наведене примене, као и уопште рад са интегралима могуће је визуелно приказати и на тај начин олакшати разумевање ове области математике. Циљ овог рада је визуелизација различитих теорема, доказа и примера помоћу програмског пакета ГеоГебра, што би требало да олакша разумевање градива. Програмски пакет ГеоГебра представља динамички математички софтвер који обједињује геометрију, алгебру и анализу. Развој овог софтвера започео је у склопу свог мастер рада Маркус Хоенвартер на Универзитету у Салцбургу 2001. године. ГеоГебра представља бесплатан софтвер, намењен наставницима и ученицима, погодан за интерактивно учење математике.

ГеоГебра има три различита начина приказивања математичких објеката: графички, алгебарски и табеларни приказ. Све три врсте приказа објеката су међусобно динамички повезане, уколико дође до промене података у било ком од ова три приказа, и у друга два приказа доћи ће до исте промене, без обзира на то на који начин је објекат изворно креиран. ГеоГебра представља програм у коме се могу креирати различите математичке конструкције и на релативно једноставан начин омогућава и креирање анимација, у чему се заправо и огледа интерактивност овог програма. Конструисане објекте и анимације могуће је сачувати у различитим форматима, у зависности од потреба корисника. Креиране објекте могуће је сачувати као слику, али је такође могуће представити анимације креиране у ГеоГебри и у оквиру неке веб странице. Управо та могућност коју овај динамички софтвер пружа се може искористити како би се на креативан начин приближила математика ученицима основних и средњих школа, као и студентима. Да би се неко градиво научило оно мора и да се разуме, а разумевању градива често може да помогне његова визуелизација. Због тога ГеоГебра представља користан програм у настави математике.

У овом раду ће бити речи о интегралима, нарочито о примени интеграла уз одговарајућу визуелизацију. У интернет презентацији овог рада која се може видети на адреси http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml08065/master биће представљени аплети чији је циљ да уз одговарајући пропратни текст приближи интеграле сваком ко жели да научи нешто о њима.

У поглављу ,,Историјски осврт на калкулусни рачун” биће укратко наведен развој калкулуса кроз векове - почев од античке Грчке, преко преткалкулусног периода, па све до Њутна и Лајбница, њиховог рада и осврта на каснији развој интегралног рачуна. Циљ овог поглавља је пре свега да прикаже постојање рада са интегралима још у давна времена и то пре свега онај део интегралног рачуна који данас спада у његову примену.

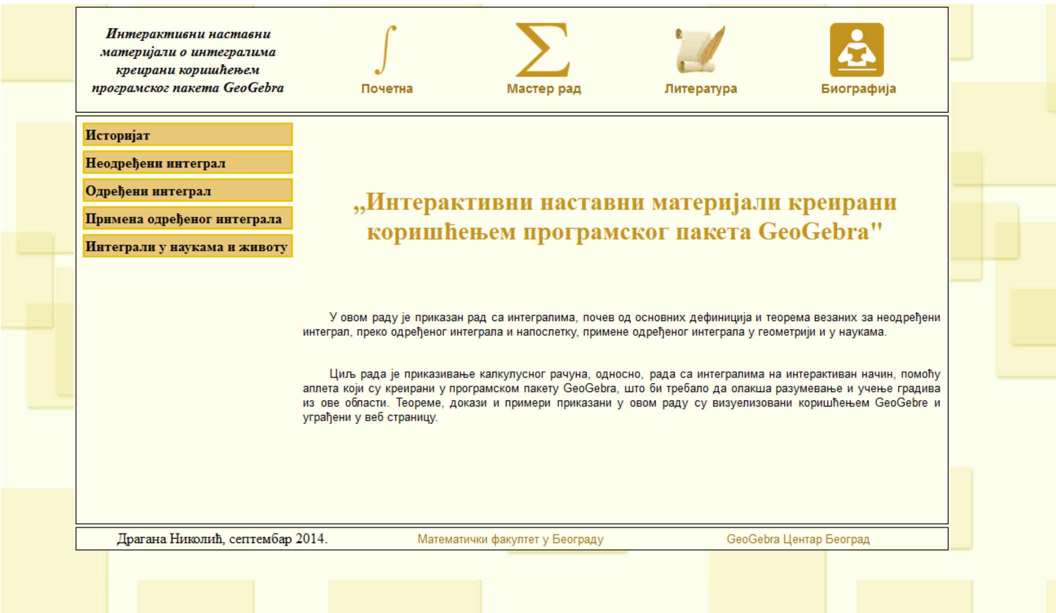
У поглављу ,,Неодређени интеграл" биће детаљно објашњен рад са неодређеним интегралима. У овом делу наведене су теореме и докази, као и карактеристични примери који се често појављују и као самостални задаци и као делови других задатака. Наведене методе, као и решења, визуелизовани су у програмском пакету ГеоГебра.

У поглављу ,,Одређени интеграл" дефинисан је одређени интеграл, као и мотивација за његово увођење. Овде је такође описан и рад са одређеним интегралима. Теореме које се налазе у овој области, као и примери, визуелизовани су у ГеоГебри.

У поглављу ,,Примена одређеног интеграла" приказана је примена интеграла за израчунавање површине, дужине лука криве, запремине и површине обртног тела. Дефиниција израчунавања ових величина, као и примери приказани у овом поглављу, визуелизовани су у ГеоГебри.

У поглављу ,,Примена интеграла у животу" приказана је примена интеграла у физици и у појединим природним наукама, као и у животу.

Основни извор дефиниција, теорема и доказа у овом раду су књиге [5] и [1].

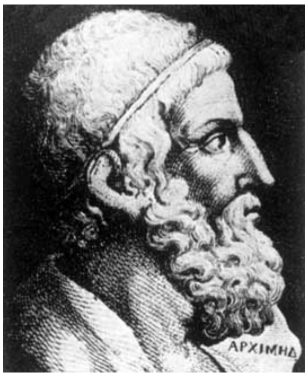


Слика 1: *Изглед почетне стране интернет презентације мастер рада ,,Интерактивни наставни материјали креирани коришћењем програмског пакета GeoGebra"*

2 Историјски осврт на калкулусни рачун

2.1 Античка Грчка

Историјски гледано, интеграл се појавио знатно пре појма извода и још се Архимед[1] у суштини користио њиме. Калкулусни рачун - рачун са интегралима и изводима, поред Архимеда има и друге засниваче. Еудокс[2] такође својим методом еустахије спада у ред заснивача калкулуса. Метод еустахије представља методу израчунавања површине неког геометријског равног лика испуњавањем унутрашњости тог лика низом полигона чије површине конвергирају ка површини целог геометријског лика. Архимед је, међутим, користио други метод - метод еквилибријума, да би тек када је формално излагао строг доказ примењивао метод еустахије. Метод еквилибријума заснивао се на механичким аргументима и примени идеје да су површи тела на неки начин ,,тешке" те да се кроз одређивање њихових тежишта може открити и математички однос у коме њихове компоненте стоје. Метод еквилибријума је у ствари претеча метода бесконачно малих. Архимедов рад *,,Квадратура параболе"* поставља темеље интеграције. Касније ће бити речи о израчунавању квадратуре параболе, коју је Архимед одредио користећи се методом еустахије, преко система уписаних и описаних правоугаоника.



Слика 2: *Архимед*

Слика 3: *Еудокс*

2.2 Преткалкулусни период и радови Њутна и Лајбница

Развоју калкулуса у преткалкулусном периоду допринели су Робервал[3], Кавалијери[4] и Ферма[5], који практично репродукују Архимедов рад, али додају и доста својих оригиналних доприноса. Код све тројице, а можда највише код Кавалијерија, примећује се одступање од три грчке догме, пре свега рад са актуелном бесконачношћу. Они су не само схватили то да се линије састоје од

[1]Архимед из Сиракузе (грч. $A\rho\chi\iota\mu\eta\delta\eta\sigma$, око 287-212. године п.н.е.), старогрчки математичар и физичар

[2]Еудокс са Книда (408-355. године п.н.е.), старогрчки математичар, астроном и научник, један од Платонових ученика

[3]Жил де Робервал(фр. Gilles Personne de Robervalle, 1602-1675), француски математичар

[4]Бонавентура Франческо Кавалијери(итал. Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598-1647), италијански математичар

[5]Пјер де Ферма(фр. Pierre de Fermat, 1601-1665), француски математичар

бесконачно тачака, површи од бесконачно правих, а просторна тела од бесконачно површи, већ су и са тим објектима почели да рачунају. Ферма је веома значајан по методима за диференцирање (тада називаним методима за одређивање максимума, минимума и тангенти) и интегрисање, који су били увод у калкулус и који су значајно помогли Њутну[6] и Лајбницу[7].

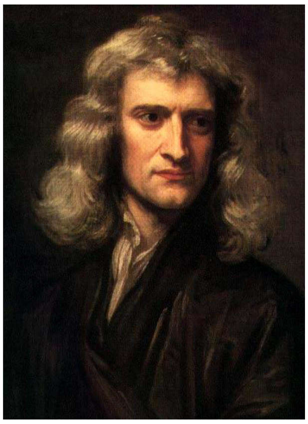
Слика 4: *Кавалијери*

Слика 5: *Пјер де Ферма*

У 17. веку долази до проналаска калкулуса од стране два велика математичара. Њутн и Лајбниц истовремено долазе до идеје о заснивању калкулусног рачуна, уз различиту нотацију и потпуно независно један од другог. Они успостављају међусобну преписку и у једном од писама Њутн је наговестио постојање некаквог ,,метода" за који је чак употребио и анаграм, што је у то доба било веома распрострањено. Њутн је десетак година касније у једном свом делу објавио како је Лајбницу наговестио познавање одређеног метода и како му је Лајбниц одговорио да је и он пронашао метод исте врсте и саопштио му метод. Касније ће Њутн покушати да оповргне ову изјаву и доћи ће до сукоба о аутору калкулусног рачуна. Доста дуго откриће калкулуса није публиковано ни у целини, ни у деловима, а први који је објавио своје откриће био је Лајбниц. Године 1684. у часопису *,,Acta Eruditorum"* који је лично основао, Лајбниц објављује чланак који садржи правила диференцирања, у савременој нотацији. Такође, у истом часопису 1686. године бива објављен Лајбницов чланак о интегралном рачуну, где се први пут уводи ознака за интеграл, која се и данас користи. Међусобна преписка двојице научника бива узрок великог спора око ауторства, а као победник из овог сукоба излази Њутн, који је имао велику подршку Британске империје, док Лајбниц бива оптужен за плагијат. Међутим, историја математике ослободила је Лајбница икакве сумње, а његова нотација и техника се и данас користе у математичкој анализи. Више о сукобу који је постојао између ова два велика математичара, као и о њиховом животу може се наћи у књизи [3].

[6]Исак Њутн(енгл. Isaac Newton, 1643-1727), енглески физичар, математичар, астроном и филозоф

[7]Готфрид Вилхем фон Лајбниц(нем. Gottfied Wilhelm von Leibniz, 1646-1716), немачки филозоф, математичар и дипломата



Слика 6: *Исак Њутн*

Слика 7: *Готфрид Лајбниц*

Историјски гледано, Еудокс са својом методом еустахије и Архимед са применом овог проналаска на израчунавање површина криволинијских фигура, спадају у ред заснивача калкулуса, док су Робервал, Кавалијери и Ферма својим резултатима кључно допринели развоју калкулуса у преткалкулусном периоду. Њихови закључци и рад су доста користили Њутну и Лајбницу који су пре свега заслужни за окупљање постојећег материјала у једну формализовану целину. До строгог заснивања калкулусног рачуна долази тек у 19. веку.

2.3 Развој калкулуса

Њутн и Лајбниц независно један од другог откривају основну теорему калкулуса, која повезује интеграцију и диференцијацију. Пре открића ове теореме није било познато да су интеграција и диференцирање било како повезани. Грегори[8] је први објавио формулацију и доказ ове теореме, док је Бароу[9] доказао општију верзију ове теореме. Бароу је био професор Исака Њутна, који је довршио развој ове математичке теорије. Лајбниц је систематизовао ова знања за бесконачне величине и то записао у савременој нотацији. Основна теорема калкулуса се састоји из два дела; први део теореме се тиче диференцирања и антидиференцирања (односно интеграције), док се други део теореме односи на везу између антидиференцирања и одређеног интеграла. Важно је напоменути да се ове теореме односе на одређене интеграле, који се историјски појављују пре неодређених.

Иако су детаљно изучили калкулус, Њутн и Лајбниц га нису формално засновали. Развојем граничних вредности долази и до формалног заснивања интеграла и интегралног рачуна. Каснијем заснивању интегралног рачуна допринели су Фурије[10] који је својом анализом обухватио све функције тако што их је представио као суму једноставних тригонометријских функција. Такође, код Фуријеа се први пут среће знак за одређени интеграл. Риман[11] је био први који је формално засновао интеграл коришћењем лимеса тј. граничних

[8]Џејмс Грегори (енг. James Gregory, 1638-1675), шкотски математичар и астроном

[9]Исак Бароу (енг. Isaac Barrow, 1630-1677), енглески теолог и математичар

[10]Жан Баптист Жозеф Фурије (фр. Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830), француски математичар и физичар

[11]Георг Фридрих Бернхард Риман (нем. Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866), немачки математичар

вредности. Он је дефинисао Риманов интеграл у смислу граничних вредности Риманових сума. Такође, овде је неопходно поменути и Дарбуов[12] интеграл који је дефинисан преко Дарбуових сума, што је једна од могућих дефиниција интеграла функције. Дарбуови интеграли еквивалентни су Римановим интегралима, што значи да је функција Дарбу интеграбилна ако и само ако је Риман интеграбилна и тада су вредности тих интеграла, ако постоје, једнаке.

Слика 8: *Гастон Дарбу*

Слика 9: *Бернард Риман*

Француски математичар Лебег[13] је формулисао другачију дефиницију интеграла и засновао је теорију мера. Поред поменутих математичара, многи други математичари допринели су развоју калкулуса у целину коју данас познајемо. Међу њима су и Коши[14] који се посебно бавио комплексном анализом и значајан је и по Кошијевој интегралној теореми која се односи на интеграле холоморфних функција у комплексној равни.

Слика 10: *Огистен Коши*

Слика 11: *Анри Лебег*

2.4 Заснивање и развој калкулуса ван Европе

Калкулус се током векова развијао у разним деловима света, не само у Европи, већ и у Индији, Кини, Јапану и на Блиском Истоку. Додуше, Њутн

[12] Жан Гастон Дарбу (фр. Jean-Gaston Darboux, 1842-1917), француски математичар
[13] Анри Лебег (фр. Henri Leon Lebesgue, 1875-1941), француски математичар
[14] Огистен Коши (фр. Augustin-Louis Cauchy, 1798-1857), француски математичар

и Лајбниц су били први који су формулисали, разумели и користили основну теорему калкулуса. Али, проблеми као што су израчунавање површине и запремине били су познати и решени још раније, пре Њутновог и Лајбницовог рођења. Већ је поменут Архимедов проблем квадратуре параболе, а ван Европског континента било је сличних проблема и решења.

Абу Али ал-Хасан ибн ал-Хајам[15] био је арапски математичар. Рођен је у Басри, граду у Персији, у 10. веку. Био је први који је извршио интеграцију полинома четвртог степена. Архимед је око 250. године пре нове ере написао дело *„О коноидама и сфероидама"*, где је, између осталог, показао запремину параболоида, фигуру која настаје ротацијом параболе око своје осе. Ово Архимедово дело било је непознато у арапском свету у 10. веку, па су Табит ибн Кира из јужне Турске и Абу Сахл ал-Куи из северног Ирана креирали сопствени доказ за запремину параболоида. Ибн ал-Хајам је читајући њихов рад преокренуо проблем на мало другачији случај. Он је посматрао случај када парабола не ротира око осе Ox, већ око осе $x = a$, на тај начин креирајући куполу која је карактеристична на многим грађевинама. Проблем запремине ове куполе решио је деобом куполе на дискове и посматрао је случај када су дискови веома танки тако да њихов број тежи бесконачности. Запремина куполе се онда своди на суму у којој фигурише полином четвртог степена. Наравно, ова запремина добијена је другим методама, различитим од савремене методе интеграције. Овде је битно уочити да се интеграл полинома четвртог степена добија геометријским путем, и то много сложенијим него што је то данас.

Почев од 11. века, арапски, кинески и индијски математичари почели су да откривају технике које би им омогућиле да израчунају површину изражену преко било ког полинома. Али, пре него што су могли да открију те формуле, морали су да створе полиноме. Полиноми другог и трећег степена су постојали и 1000 година уназад, али су изражавали површине и запремине одговарајућих геометријских ликова. Није било потпуно јасно шта би четврти степен полинома могао да представља. Полиноми вишег степена су се скоро истовремено појавили око 1000. године у Индији, Кини и на Блиском Истоку.

У Индији у 14. веку настала је Керала школа. У њој су се изучавале математика и астрономија у периоду између 14. и 16. века. У циљу решавања астрономских проблема, у овој школи је дошло до откривања многих важних математичких концепата, нарочито у области бесконачних редова, који представљају значајну компоненту развоја калкулуса.

У 17. веку у Јапану, јапански математичари су дошли до открића у вези калкулусног рачуна, нарочито математичар Кова Секи. Његов допринос огледа се у рачунању површина фигура коришћењем интеграла, проширујући метод еустахије. Из овога се види да се математика у Јапану развијала у истом смеру као и у Европи тога доба.

Такође, калкулус је био познат и у Кини. У трећем веку кинески математичар Лиу Хуи је коришћењем Кавалијеријевог принципа дошао до формуле за запремину цилиндра, где је показао схватање основних принципа интеграције и диференцирања. Занимљиво је приметити да се калкулус користио и у старом Египту за израчунавање запремине зарубљене пирамиде, као и у поновном

[15]лат. Alhazen, арапски научник, математичар, филозоф и астроном

премеравању парцела након плављења реке Нил, што се може видети у Московском папирусу који датира из 1800. године пре нове ере.

Слика 12: *Московски папирус*

3 Неодређени интеграл

Појам интеграла се у школовању први пут јавља у четвртом разреду средње школе и потом се то градиво додатно проширује на факултетима на којима се изучавају природне науке. Како диференцирање и интегрисање представљају две узајамно инверзне математичке операције, након увођења појма извода и операција са изводима, ученици се сусрећу са интегралима. Интеграл представља основни појам математичке анализе.

Познато је да је могуће директно израчунати изводе основних елементарних функција, по дефиницији, а да се изводи свих осталих елементарних функција добијају уз помоћ доказаних правила за изводе алгебарских комбинација, за извод сложене и инверзне функције. Логично је поставити и обрнут проблем: ако је познат извод F' неке функције F, наћи ту функцију. Односно, ако је f дата функција на неком интервалу, одредити функцију F тако да важи:

$$F'(x) = f(x)$$

тј.

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Наведени проблем представља увод у интегрални рачун и рад са интегралима.

3.1 Примитивна функција

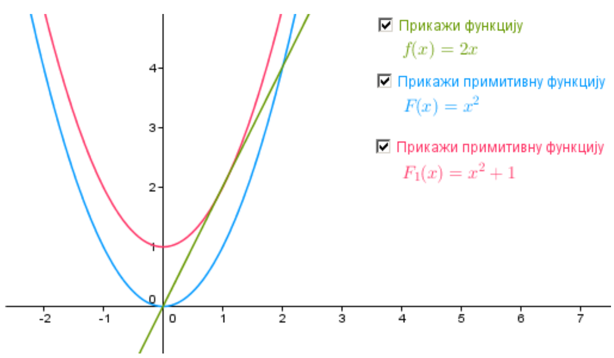
Дефиниција 1. *Функција F је примитивна функција за функцију f на неком интервалу ако је F диференцијабилна на том интервалу и за свако x из тог интервала важи*

$$F'(x) = f(x).$$

Пример 1. *Функција $F(x) = \sin x$ је примитивна функција функције $f(x) = \cos x$ за $x \in \mathbb{R}$, јер је $F'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$.*

Пример 2. *Функција $F(x) = x^2$ је примитивна функција за функцију $f(x) = 2x$ на скупу $\mathbb{R}$. Међутим, функција $F_1(x) = x^2 + 1$ је такође примитивна функција за исту функцију на $\mathbb{R}$ јер важи:*

$$F_1'(x) = (x^2 + 1)' = 2x = f(x).$$



Слика 13: *Графички приказ функција f, F и F_1*

Из претходног примера се може закључити да ако за дату функцију f постоји примитивна функција на неком интервалу онда она није једнозначно одређена.

Теорема 1. *Ако је $F(x)$ примитивна функција за $f(x)$ на неком интервалу, онда је и $F(x)+c$, где је c произвољна реална константа, примитивна функција за $f(x)$ на том интервалу.*

Доказ. Нека је c произвољан реалан број и нека је F примитивна функција за функцију f на интервалу (a,b). Онда за свако $x \in (a,b)$ важи:

$$F'(x) = f(x).$$

Такође, за свако $x \in (a,b)$ важи и:

$$(F(x)+c)' = F'(x) = f(x).$$

Дакле, свака од функција $F(x)+c, c \in \mathbb{R}$ је примитивна функција за функцију f на интервалу (a,b). □

Теорема 2. *Ако су $F(x)$ и $G(x)$ примитивне функције за функцију $f(x)$ у неком интервалу, онда је разлика $F(x)-G(x)$ константна у том интервалу.*

Доказ. Нека је функција $\varphi(x) = F(x)-G(x), x \in (a,b)$. Функција φ је диференцијабилна на (a,b) и важи:

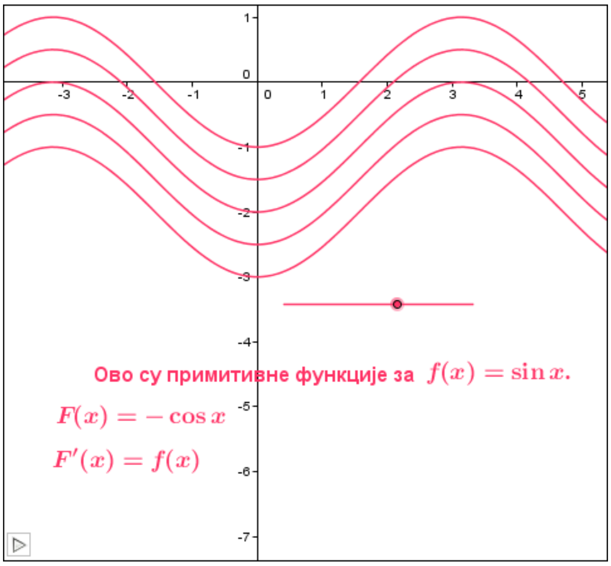
$$\varphi'(x) = (F(x)-G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

за све $x \in (a,b)$. Одавде, на основу последице Лагранжове теореме[16] следи да је $\varphi(x) = c$, одакле је $F(x)-G(x) = c$. □

Наведене теореме имају и своју геометријску интерпретацију која ће овде бити приказана. Геометријска интерпретација ових теорема би требало додатно да појасни њихово значење.

Ако је у координатном систему xOy у равни скициран график једне од примитивних функција функције $f(x), x \in (a,b)$ онда ће свака крива у тој равни добијена транслацијом овог графика дуж Oy осе представљати график функције која је примитивна функција за $f(x), x \in (a,b)$. На овај начин добијају се графици свих примитивних функција.

[16] Последица Лагранжове теореме о средњој вредности диференцијалног рачуна. Ова теорема се може видети у књизи [1]



Слика 14: *Аплет на којем су приказане примитивне функције за* $f(x) = \sin x$

Да би се из скупа свих примитивних функција за $f(x)$ на одређеном интервалу издвојила једна одређена примитивна функција, мора се поставити додатни услов. То ће бити приказано у наредном примеру.

Пример 3. *Наћи примитивну функцију функције* $f(x) = x - 2$ *чији график садржи тачку* $A(1, 1)$.

Решење. Важи следеће:

$$(x-2) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - (2x)' = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)'.$$

Одавде се може закључити да је једна од примитивних функција једнака $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$. Произвољна примитивна функција је

$$F(x) = \frac{1}{2}x - 2x + c, x \in \mathbb{R}.$$

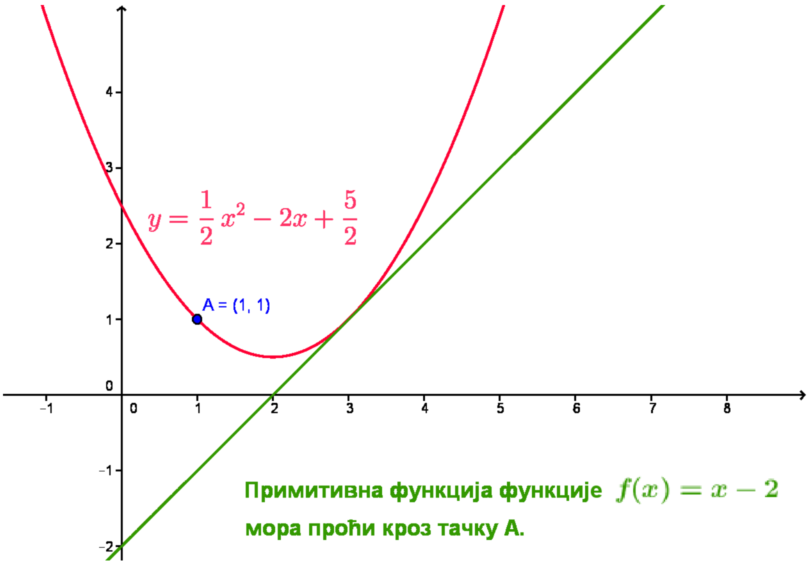
Како график примитивне функције мора да садржи тачку $A(1, 1)$, додатни услов који функција мора да задовољи је $F(1) = 1$, односно,

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + c.$$

Одавде се добија да је $c = \frac{5}{2}$. Тражена примитивна функција је

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}.$$

$\triangle$



Слика 15: *Графичка интерпретација примера*

Дефиниција 2. *Скуп свих примитивних функција функције $f(x)$ назива се неодређеним интегралом функције $f(x)$ и означава се са*

$$\int f(x)dx.$$

У наведеној дефиницији, симбол $\int$ је **знак интеграла,** $f(x)$ се назива **подинтегралном функцијом,** док је $f(x)dx$ **подинтегрални израз.** Ако је $F(x)$ једна примитивна функција функције $f(x)$ на неком интервалу, онда се, према теореми 1. скуп $\int f(x)dx$ на том интервалу може написати у облику $\{F(x) + c | c \in \mathbb{R}\}$, односно,

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Теорема 3. *Нека је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на неком интервалу. Тада је:*

1. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;
2. $\int f(x)dx = \int dF(x) = F(x) + c$;
3. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
4. *За функције $f(x)$ и $g(x)$ важи једнакост $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.*

Доказ. 1. Како је F примитивна функција за функцију f, важи да је $F'(x) = f(x)$. Такође, важи и:
$d(\int f(x)dx) = d(F(x) + c) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int f(x)dx = \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + c$.
Из наведена два својства закључује се да су операције диференцирања и интеграције међусобно инверзне са тачношћу до произвољне константе.

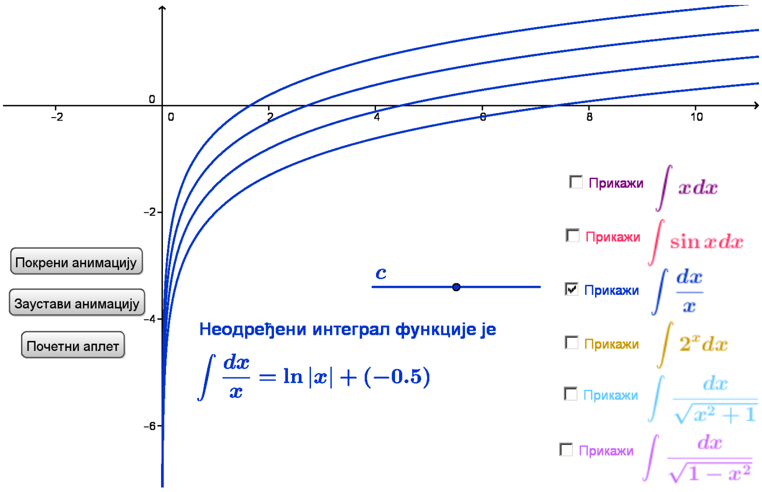
3. Из претходног важи да је
$$\left(\int kf(x)dx\right)' = k \cdot f(x).$$
Такође,
$$\left(k \cdot \int f(x)dx\right)' = k \cdot \left(\int f(x)dx\right)' = k \cdot f(x).$$
Овим је доказано да је лева страна једнакости једнака десној.

4. И овде ће бити показано да је лева страна једнакости једнака десној тако што ће и лева и десна страна бити понаособ диференциране.
$(\int (f(x) + g(x))dx)' = f(x) + g(x)$;
$(\int f(x)dx + \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' + (\int g(x)dx)' = f(x) + g(x)$.

$\square$

Како је на основу познатих извода неких функција могуће наћи примитивне функције, а самим тим и неодређене интеграле датих функција, да би налажење неодређених интеграла једноставних елементарних функција било олакшано овде ће бити наведена таблица неодређених интеграла уз одговарајуће услове.

	Интеграл	Услови
1	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$	$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, x > 0$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$	$x \neq 0$
3	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$a > 0, a \neq 1$
4	$\int e^x dx = e^x + c$	
5	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	
6	$\int \cos x dx = \sin x + c$	
7	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	$\mid x \mid < 1$
10	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$	
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\| + c$	
12	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + c$	$\|x\| \neq 1$



Слика 16: *Аплет на којем су приказане неке од функција из таблице и њихови неодређени интеграли за различите вредности константе c*

Наведени услови се односе на непрекидност подинтегралне функције, као и на ограничења која параметар који учествује у формули мора да задовољи. Такође, мора се водити рачуна и о дефинисаности елементарне функције чији се неодређени интеграл тражи.

3.2 Методи интеграције

До сада приказани примери могли су бити решени коришћењем основних својстава неодређеног интеграла и таблице интеграла. Међутим, примери са којима се можемо срести могу бити много сложенији од наведених, тако да нам решење није увек очигледно. Због тога су овде представљена још два метода интеграције - методом смене и методом парцијалне интеграције. Такође, овде ће бити наведени и примери интеграције неких посебних класа функција. У формулацијама теорема које следе биће коришћен појам непрекидно-диференцијабилне функције на интервалу. То је функција која је диференцијабилна на интервалу и њен извод је непрекидна функција на том интервалу.

3.2.1 Метод смене

Овај метод се заснива на правилу за диференцирање сложене функције.

Теорема 4. *Нека је $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ примитивна функција функције $f(t), t \in A$ и нека је $g : B \longrightarrow A$ диференцијабилна за $x \in B$, где су A и B интервали. Тада постоји примитивна функција функције $f(g(x))g'(x), x \in B$ и при том важи једнакост*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c.$$

Доказ. Потребно је доказати да су изводи леве и десне стране једнаки.

$$D = \left(\int f(g(x))g'(x)dx\right)' = f(g(x))g'(x);$$

$$L = (F(g(x)) + c)' = F'_{g(x)}(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Одавде важи да је $D = L$, тј. лева и десна страна су заиста једнаке. □

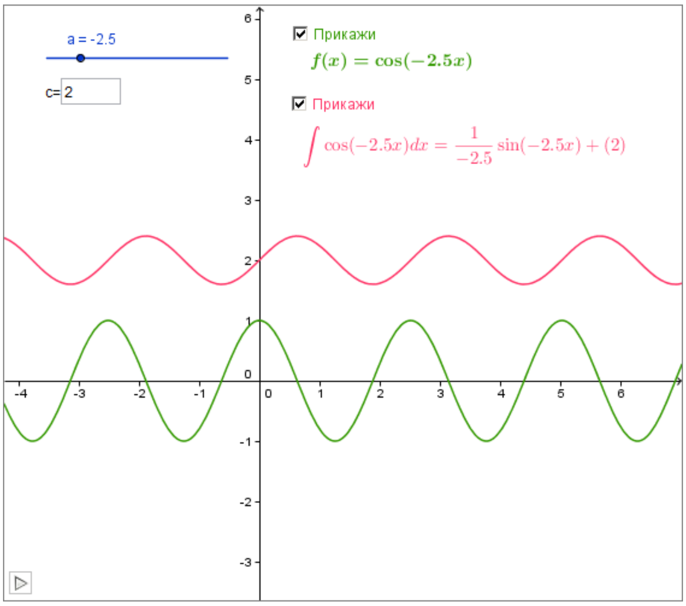
Сада ће бити приказано неколико карактеристичних примера који се често појављују у задацима.

Пример 4. *Методом смене решити интеграл* $\int \cos ax dx, a \in \mathbb{R}$.

Решење. У ситуацијама када се користи метода смене у интегралу, циљ је да се увођењем смене дати интеграл сведе на облик неког од табличних интеграла или на неки други погодан облик. У овом примеру, биће уведена смена $t = ax$. Након извршеног диференцирања, добија се $dt = adx$, тј. важиће $dx = \frac{1}{a}dt$.

$$\int \cos ax dx = \int \frac{1}{a} \cdot \cos t dt = \frac{1}{a} \sin t + c = \frac{1}{a} \sin ax + c.$$

△



Слика 17: *Аплет на којем је приказан график подинтегралне функције и решење интеграла у зависности од константи a и c*

Применом исте смене као у претходном примеру решава се и интеграл $\int \sin ax dx$.

Пример 5. *Решити интеграл* $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

Решење. Приликом решавања наведеног интеграла прво ће бити извршене одређене трансформације, а потом уведена и одговарајућа смена. Након трансформације израз изгледа овако:

$$\frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a^2\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}.$$

Пошто је израз трансформисан на погодан облик, може се увести смена $t = \frac{x}{a}$, којом ће се наведени интеграл свести на таблични. Одавде ће бити $dt = \frac{1}{a}dx$, односно, $dx = adt$. Сада ће применом наведених трансформација и смене бити приказано решење примера.

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2(1+\frac{x^2}{a^2})} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \int \frac{a\cdot dt}{a^2\cdot(1+t^2)} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\cdot arctgt + c = \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a} + c.$$

△

Пример 6. *Методом смене решити интеграл* $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решење. Као и у претходном примеру, биће извршене одговарајуће трансформације на датом интегралу.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2(1-(\frac{x}{a})^2)}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{adt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

△

Пример 7. *Методом смене решити интеграл* $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решење. Уводи се смена $x = a\sin t$. Одатле је $dx = a\cos tdt$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$ и важи да је $\cos t = \sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$. Увођењем наведене смене добија се следеће:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a\int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cos tdt = a^2\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = a^2\int \cos^2 tdt.$$

Сада је потребно решити интеграл $\int \cos^2 tdt$. У овом случају, када је интегранда квадрат неке тригонометријске функције, потребно је искористити адиционе формуле за тригонометријске функције полууглова и на тај начин се ослободити квадрата. Познато је да важи $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, што ће бити искоришћено приликом даљег решавања овог задатка. Дакле, важи:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2 tdt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\cdot\sin t\cos t + c = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c.$$

Добијено решење важи под условима да је $-a < x < a$ и да је $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. △

Пример 8. *Размотрити решавање интеграла облика* $\int f(ax+b)dx$.

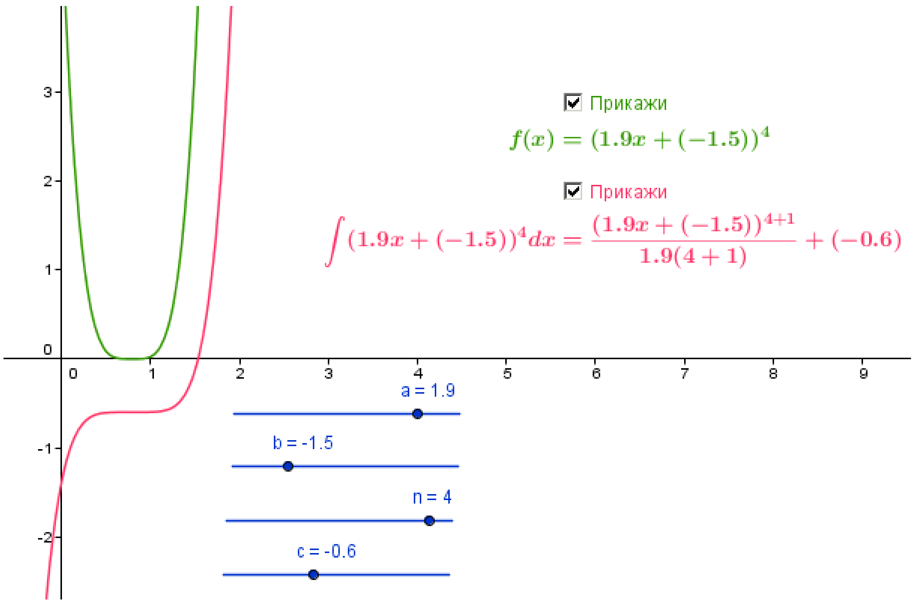
Решење. Приликом решавања интеграла овог облика уводи се смена $t = ax+b$. Решење је:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\varphi(ax+b)+c.$$

Један од примера овог типа је и

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+c.$$

$\triangle$



Слика 18: *Аплет на којем је приказан график подинтегралне функције и решење интеграла у зависности од константи a, b, n и c*

Пример 9. *Решити интеграл* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Решење. Увођењем смене $t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$ добија се да је $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$. Дакле,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c.$$

$\triangle$

3.2.2 Метод парцијалне интеграције

Метод парцијалне интеграције најчешће се користи уколико је подинтегрална функција заправо извод производа две функције.

Теорема 5. *Нека су $u(x)$ и $v(x)$ диференцијабилне функције и нека постоји примитивна функција функције $u'(x)v(x)$. Тада постоји примитивна функција функције $u(x)v'(x)$ и при томе важи једнакост:*

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Скраћени запис ове формуле која ће се користити у примерима гласи:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказ. Извод производа двеју диференцијабилних функција u и v налази се по формули:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

а диференцијал производа таквих двеју функција је:

$$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x).$$

Ако се искористи својство неодређеног интеграла које тврди да су операције налажења неодређеног интеграла и диференцијала међусобно инверзне, добија се

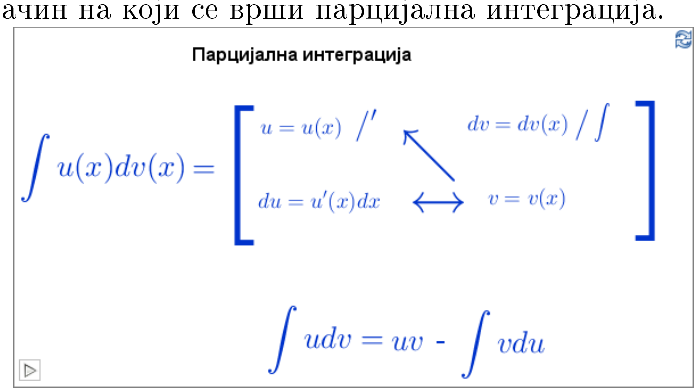
$$u(x)v(x) + c = \int v(x)du(x) + \int u(x)dv(x).$$

Одавде је

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x),$$

што је требало доказати. □

Најчешће се користи скраћени запис ове формуле. Метод парцијалне интеграције се може користити ако је могуће наћи једну примитивну функцију $v(x)$ за $v'(x)$ и ако се зна $\int v(x)du(x)$. Овај метод се примењује ако су две интеграције једноставне. На слици 19. је приказан аплет на којем се графички, корак по корак, приказује начин на који се врши парцијална интеграција.



Слика 19: *Аплет на којем је приказано извршавање парцијалне интеграције*

Приликом коришћења ове методе треба водити рачуна о томе да се за $u(x)$ изабере функција чији је извод једноставан, под условом да израз који после тога преостаје у подинтегралном изразу може једноставно да се интеграли. До закључка да ли је примена методе парцијалне интеграције оправдана и да ли је избор функције $u(x)$ и диференцијала $dv(x)$ успешно направљен добија се на основу тога да ли је на крају добијени интеграл $\int v(x)du(x)$ једноставан и да ли га је могуће наћи.

Пример 10. *Методом парцијалне интеграције решити интеграл* $\int x \cdot e^x dx$.

Решење. За наведени интеграл постоје два начина да се изврши парцијална интеграција. Овде ће бити приказана оба начина, први, који ће подинтегралну функцију учинити сложенијом и други, који ће упростити подинтегралну функцију, што је и сврха примењивања парцијалне интеграције.

Први начин: Нека је $u(x) = e^x, dv(x) = xdx$. Одатле следи да је $du(x) = e^x dx$, $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$, односно важи:

$$\int x \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2}\, e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx.$$

У овом случају, подинтегрална функција је постала сложенија за интеграцију, тј. полином у подинтегралном изразу је вишег степена него у почетном интегралу. Према томе, уколико се настави примена методе парцијалне интеграције на овај начин, интеграл ће постајати све сложенији, што није циљ који треба постићи.

Други начин: Нека је $u(x) = x, dv(x) = e^x dx$. Одатле се добија да је $du(x) = dx, v(x) = e^x$, па на основу наведене теореме о парцијалној интеграцији важи:

$$\int x \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

Одабиром другог начина за решавање интеграла долази се до решења. $\triangle$

Пример 11. *Методом парцијалне интеграције решити интеграл* $\int e^{ax} \cos bx dx$, *где су* $a, b \in \mathbb{R}$.

Решење. Нека је тражени интеграл једнак I. Биће примењена парцијална интеграција по формули.

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} \int \cos bx de^{ax} = \frac{1}{a} \left(e^{ax} \cos bx + b \int e^{ax} \sin bx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{a} \left(e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int \sin bx de^{ax} \right) = \frac{1}{a} \left(e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left(e^{ax} \sin bx - b \int e^{ax} \cos bx dx \right) \right) =$$

$$= \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}\, e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Интеграл добијен на крају идентичан интегралу који је задат на почетку. Дакле, претходна једнакост сада изгледа овако:

$$I = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}\, e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2}\, I,$$

односно, важи следеће:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot I = \frac{a \cdot e^{ax} \cos bx + b \cdot e^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2}.$$

Коначно, добија се да је тражени интеграл једнак:

$$I = \frac{a \cdot e^{ax} \cos bx + b \cdot e^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2}.$$

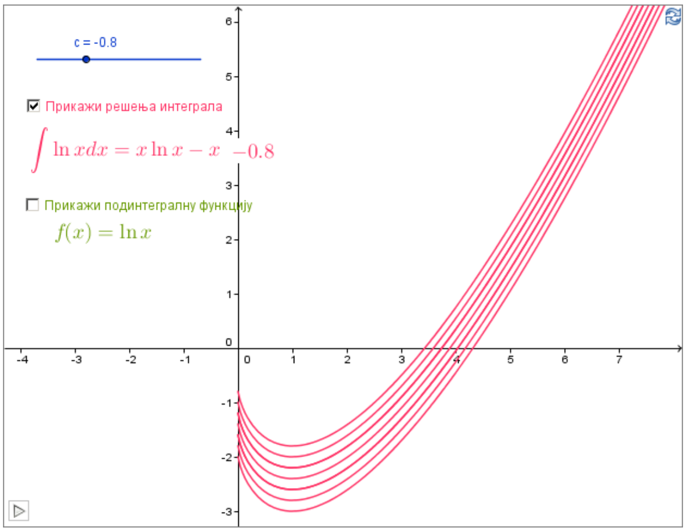
$\triangle$

Пример 12. *Методом парцијалне интеграције решити интеграл* $\int \ln x dx$.

Решење. Када је у питању интеграл функције $\ln x$ или било који други интеграл у коме се ова функција појављује, он се увек решава методом парцијалне интеграције. У наведеним случајевима, пошто интеграл функције $\ln x$ није познат, потребно је изабрати $u(x) = \ln x$ и $dv(x) = dx$. Тада је $du(x) = \frac{1}{x}dx, v(x) = x$. Дакле, важи:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

△



Слика 20: *Аплет на којем су приказана решења неодређеног интеграла за различите вредности константе c*

Пример 13. *Методом парцијалне интеграције решити интеграл* $\int arctgx dx$.

Решење. Као и у претходном примеру, када је у питању интеграл функције $arctgx$ или било који други интеграл у коме се ова функција појављује као део подинтегралне функције, он се решава методом парцијалне интеграције. Потребно је изабрати $u(x) = arctgx, dv(x) = dx$, а онда је $du(x) = \frac{dx}{1+x^2}, v(x) = x$. Добија се:

$$\int arctgx dx = x \cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Уколико се овде уведе смена $t = 1+x^2$, добија се да је почетни интеграл једнак:

$$x \cdot arctgx - \int \frac{dt}{2t} = x \cdot arctgx - \frac{1}{2} \ln t + c = x \cdot arctgx - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c.$$

Дакле,

$$\int arctgx dx = x \cdot arctgx - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c.$$

△

Пример 14. *Методом парцијалне интеграције решити интеграл* $\int \sqrt{a^2+x^2}dx.$

Решење. Нека је полазни интеграл једнак I и нека је $u(x) = \sqrt{a^2+x^2}, dv(x) = dx$. Одавде је $du(x) = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}, v(x) = x$. Дакле,

$$I = \int \sqrt{a^2+x^2}dx = x \cdot \sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx.$$

У бројиоцу ће бити додато и одузето a^2 и добијени интеграл је тада могуће записати као збир два интеграла.

$$x \cdot \sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}dx + a^2 \cdot \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|.$$

У добијеном изразу може се уочити полазни интеграл:

$$I = x \cdot \sqrt{a^2+x^2} - I + a^2 \cdot \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|,$$

односно,

$$2I = x \cdot \sqrt{a^2+x^2} + a^2 \cdot \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|.$$

Дакле, решење полазног интеграла је:

$$I = \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{a^2+x^2} + a^2 \cdot \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|\right).$$

$\triangle$

Пример 15. *Решити интеграл* $\int \sqrt{x^2-a^2}dx.$

Решење. Тражени интеграл биће означен са I и решава се методом парцијалне интеграције. Нека је $u(x) = \sqrt{x^2-a^2}, dv(x) = dx$. Одавде је $du(x) = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}, v(x) = x$.

$$I = \int \sqrt{x^2-a^2}dx = x \cdot \sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Овде се поступа као и у претходном примеру, у бројиоцу добијеног интеграла ће бити додато и одузето a^2, а након тога, уочава се да у добијеном изразу постоји исти интеграл као полазни:

$$I = x\cdot\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}dx - \int \frac{a^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = x\cdot\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|.$$

Тражени интеграл једнак је:

$$I = \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|\right).$$

$\triangle$

Пример 16. *Наћи рекурентну формулу за интеграл* $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Решење. Биће размотрена два случаја. Први је када је $n = 1$, а други када је $n > 1$. У случају када је $n = 1$, добија се таблични интеграл:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c.$$

Међутим, у случају када је $n > 1$, користи се метод парцијалне интеграције. Нека је $u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$, $dv(x) = dx$, одакле се добија да је $du(x) = -\frac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}}dx$, $v(x) = x$. Дакле:

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx.$$

У бројиоцу ће бити додата и одузета јединица, па се добијени интеграл може представити као збир два интеграла. Дакле, I_n је једнако:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \cdot \left(\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} \right) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \left(I_n - I_{n+1} \right).$$

Одавде се добија рекурентна веза:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \, I_n.$$

Односно, ако је у питању рекурентна веза за I_n:

$$I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \left(\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right).$$

$\triangle$

3.3 Интеграција неких посебних класа функција

Приликом решавања интеграла појединих класа функција, могуће је увести неке карактеристичне смене које ће интеграл упростити и омогућити његово једноставније решавање. Овде ће бити размотрена интеграција три посебне класе функција: рационалне, ирационалне и тригонометријске функције.

3.3.1 Интеграција рационалне функције

Нека је дата рационална функција $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Могу се за почетак уочити два случаја. У првом случају, уколико је степен полинома $P(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$ дата функција се назива правим разломком. У другом случају, уколико је степен полинома $P(x)$ већи од степена полинома $Q(x)$, може се извршити дељење полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ и на тај начин полином $P(x)$ се записује у облику:

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

при чему је степен полинома $R(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$. Сада рационална функција са почетка изгледа овако:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

односно као збир полинома и правог разломка. Уколико се тражи интеграл рационалне функције $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, у другом случају то би била следећа једнакост:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Како је из таблице могуће одредити интеграл полинома, овај проблем се своди на одређивање интеграла правог разломка. Да би се одредио интеграл правог разломка, за почетак, потребно је факористати полином $Q(x)$ у имениоцу.

Пример 17. *Размотрити интеграл облика* $\int \frac{dx}{x-a}$.

Решење. Ово је интеграл рационалне функције, код кога се у бројиоцу налази константа, а у имениоцу полином првог степена. Уколико се уведе смена $t = x - a$, добија се таблични интеграл $\int \frac{dt}{t}$. Дакле, решење је:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c.$$

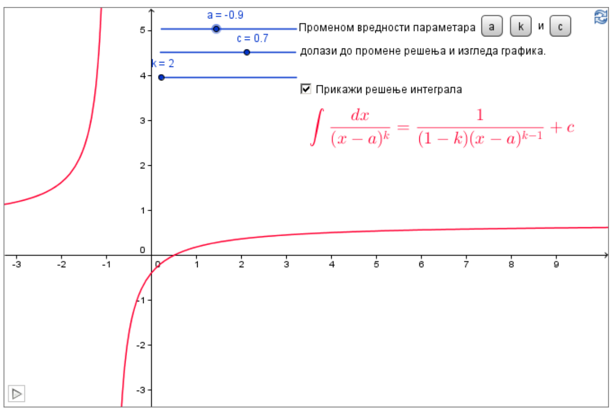
$\triangle$

Пример 18. *Наћи интеграл* $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$, *за* $k > 1$.

Решење. Као и у претходном примеру уводи се смена $t = x - a$.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int \frac{dt}{t^k} = \frac{1}{(1-k)t^{k-1}} + c = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c.$$

$\triangle$



Слика 21: *Аплет на којем су приказана решења неодређеног интеграла за различите вредности параметара* a, k *и константе* c

Пример 19. *Решити интеграл* $\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$, *ако је* $a \neq 0$.

Решење. Биће уведена смена $t = x^2 + a^2$. Након увођења смене, добија се решење:

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2+a^2| + c.$$

△

Пример 20. *Размотрити интеграл рационалне функције код кога је степен полинома у бројиоцу већи од степена полинома у имениоцу. У питању је интеграл* $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$.

Решење. Како је степен полинома у бројиоцу већи од степена полинома у имениоцу, прво ће бити извршено дељење полинома. Добија се:

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int xdx - \int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c.$$

△

Сада ће бити наведене теореме које се користе приликом интеграљења рационалних функција.

Став 1. *Полином* $P(x)$ *дељив је са* $(x-a)$ *ако и само ако је* $Q(a) = 0$.

Став 2. *Сваки полином степена* $n > 1$ *има тачно* n *нула, реалних или комплексних.*

Међу n нула полинома $Q(x)$ може бити и једнаких. Према томе, ако су $a_1, a_2, \ldots, a_m$ све различите нуле полинома

$$Q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0, \tag{1}$$

онда се може написати

$$Q(x) = c_n(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_m)^{k_m}, k_1+k_2+\ldots+k_m = n,$$

при чему се број k_i назива редом нуле a_i.

Пример 21. *Решити интеграл* $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ *за* $n > 1, a \neq 0$.

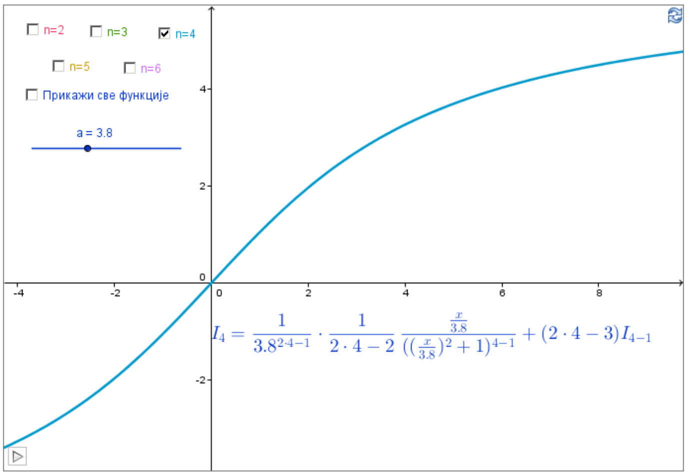
Решење. Израз у имениоцу биће трансформисан:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n},$$

ако је $t = \frac{x}{a}$. Добијени интеграл је размотрен у примеру 16, па важи:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot \frac{1}{2n-2} \cdot \left(\frac{\frac{x}{a}}{(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right),$$

за $n = 2, 3, \ldots$ △



Слика 22: *Аплет на којем су приказана решења интеграла за различите вредности броја a и n, на слици је приказано решење за $n = 4$*

Пример 22. *Решити интеграл* $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}$.

Решење. У наведеном примеру уводи се смена $t = x^2 + a^2$, а одавде је и $xdx = \dfrac{dt}{2}$.

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-n)t^{n-1}} + c = -\frac{1}{2(n-1)\cdot(x^2+a^2)^{n-1}} + c.$$

△

Став 3. *Ако је комплексан број $z = \alpha + i\beta$ нула полинома*

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

са реалним коефицијентима c_i, онда је њему конјугован број $\overline{z} = \alpha - i\beta$ такође нула полинома $Q(x)$.

Доказ. За два произвољна комплексна броја z_1 и z_2 важе једнакости: $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ и $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$. Како је z нула полинома $Q(x)$, важи да је

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i = 0.$$

Потребно је доказати да је и $Q(\overline{z}) = 0$. За $Q(\overline{z})$ важи следеће:

$$Q(\overline{z}) = \sum_{i=0}^{n} c_i \overline{z}^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{c_i z^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} c_i z^i} = \overline{Q(z)} = 0.$$

□

Дакле, ако је $Q(x)$ полином са реалним коефицијентима и комплексном нулом $z_1 = \alpha + i\beta$, тада он има и нулу $z_2 = \alpha - i\beta$, па је дељив са:

$$(x - z_1)(x - z_2) = (x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q,$$

ако је $p = -2\alpha$, а $q = \alpha^2 + \beta^2, p, q \in \mathbb{R}$. Наведена квадратна једначина има дискриминанту мању од нуле. Имајући ово у виду, као и једнакост (1), полином $Q(x)$ са реалним коефицијентима од којих је уз највиши степен јединица може се написати у облику:

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_p)^{k_p}(x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1} \cdots (x^2 + b_q x + c_q)^{l_q},$$

где је $k_1 + k_2 + \ldots + k_p + 2 \cdot (l_1 + \ldots + l_q) = n$, n је степен полинома $Q, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, {b_i}^2 - 4c_i < 0, i = 1, \ldots p$, $j = 1, \ldots, q$.

Одређивање параметара овог разлагања еквивалентно је налажењу свих нула полинома $Q(x)$, тј. решавању једначине $Q(x) = 0$. Под претпоставком да је разлагање дато у задатку или да је полином $Q(x)$ довољно једноставан да га је познатим методама могуће раставити, рационална функција $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ може да се представи у облику збира извесног броја разломака. Сваком фактору облика $(x - a_i)^{k_i}$, $i = 1, \ldots, p$, полинома $Q(x)$ одговара збир k_i разломака:

$$\frac{A_{i1}}{x - a_i} + \frac{A_{i2}}{(x - a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(x - a_i)^{k_i}},$$

а сваком фактору облика $(x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}, j = 1, \ldots, q$, одговара збир n_j разломака:

$$\frac{M_{j1}x + N_{j1}}{x^2 + b_j x + c_j} + \frac{M_{j2}x + N_{j2}}{(x^2 + b_j x + c_j)^2} + \ldots + \frac{M_{jn_j}x + N_{jn_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}}.$$

При том су $A_{i\mu}, M_{j\nu}, N_{j\nu}$ непознати коефицијенти које треба одредити. Они се одређују методом неодређених коефицијената. Изједначавањем дате функције $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ са наведеним збиром и множењем добијене једнакости са $Q(x)$ добијају се полиноми. Добијена је једнакост двају полинома. Два полинома су идентички једнака ако и само ако су им једнаки коефицијенти уз одговарајуће степене. Изједначавањем тих коефицијената добија се систем једначина из кога можемо наћи тражене коефицијенте. Битно је приметити да је приликом оваквог разлагања у бројиоцу увек полином за степен мањи од полинома у имениоцу, ако се посматра општи облик полинома.

Дакле, сваку рационалну функцију је могуће разложити на збир полинома и простих разломака. Према томе, интеграција рационалне функције своди се на интеграцију полинома и простих разломака. Како је интеграција полинома једноставна, у наредним примерима ће бити размотрено интегрисање простих разломака.

Пример 23. *Решити интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 20}$.

Решење. У овом примеру, полином у имениоцу је нерастављив. У том случају, квадратни трином $x^2+2x+10$ биће записан у канонском облику $x^2+2x+10 = (x+1)^2+9$.

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x+20} = \int \frac{dx}{2(x^2+2x+10)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2x+1+9} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+9}.$$

Уводи се смена $t = x+1$. Тада се добија да је почетни интеграл једнак:

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x+20} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+3^2} = \frac{1}{6}\cdot arctg\frac{t}{3} + c = \frac{1}{6}\cdot arctg\frac{x+1}{3} + c.$$

$\triangle$

Пример 24. *Решити интеграл* $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+9}dx$.

Решење. Као и у претходном примеру, полином који се налази у имениоцу је нерастављив. Полином ће бити записан у канонском облику $x^2+4x+9 = (x+2)^2+5$, а потом ће бити уведена смена $t = x+2$. Одавде је $x = t-2$. Добија се следеће:

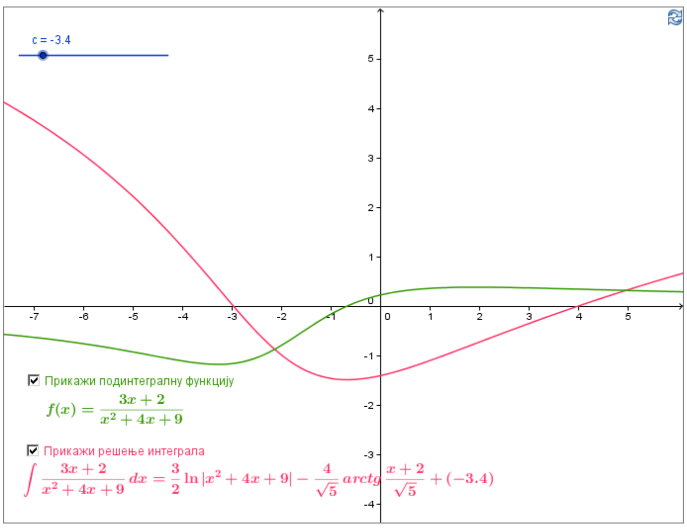
$$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+9}dx = \int \frac{3x+2}{(x+2)^2+5}dx = \int \frac{3(t-2)+2}{t^2+5}dt = \int \frac{3t-4}{t^2+5}dt.$$

Добијени интеграл ће бити растављен на збир два интеграла који су од раније познати. Добија се следеће решење:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+9}dx = 3\int \frac{tdt}{t^2+5} - 4\int \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot \ln|t^2+5| - \frac{4}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{t}{\sqrt{5}} + c = \frac{3}{2}\cdot \ln|x^2+4x+9| - \frac{4}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}} + c.$$

$\triangle$



Слика 23: *Аплет на којем је приказан график подинтегралне функције, као и решења интеграла за различите вредности константе c*

Пример 25. *Решити интеграл* $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx.$

Решење. Како је степен полинома у бројиоцу мањи од степена полинома у имениоцу, нема потребе за дељењем ова два полинома, јер је у питању прави разломак. Рационална функција ће бити разложена на збир простих разломака на следећи начин:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Уколико се обе стране наведене једнакости помноже са $(x-2)(x^2+1)^2$ добија се следеће:

$$2x^2+2x+13 = (A+B)x^4+(-2B+C)x^3+(2A+B-2C+D)x^2+(-2B+C-2D+E)x+(A-2C-2E).$$

Изједначавањем коефицијената уз одговарајуће степене и добија се систем једначина чија су решења $A=1, B=-1, C=-2, D=-3, E=-4$. Сада је могуће почетни интеграл раставити на збир интеграла простих разломака:

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx.$$

Први интеграл једнак је:

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2|.$$

Други интеграл ће прво бити записан као збир два интеграла:

$$\int \frac{x+2}{x^2+1}dx = \int \frac{xdx}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2+1| + 2\cdot arctgx.$$

Трећи интеграл се такође раставља на два интеграла и добијају се интеграли познати од раније:

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx = 3\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + 2\cdot\frac{x}{x^2+1} + 2\cdot arctgx.$$

Решење почетног интеграла је онда:

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \ln|x-2| - \frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+1| - 4\cdot arctgx + \frac{3}{2(x^2+1)} - \frac{2x}{x^2+1} + c.$$

$\triangle$

3.3.2 Интеграција ирационалних функција

Ирационалне функције такође се могу појавити као део подинтегралне функције. Коришћењем одговарајућих смена интеграле чије подинтегралне функције садрже корене могуће је свести на већ размотрени и познати случај интеграције рационалних функција. Овде ће укратко, уз пар примера, бити размотрена интеграција неких ирационалних функција.

Први и најједноставнији случај је када се под кореном налазе линеарне функције тј. уколико је тражени интеграл облика:

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right),$$

где је са R означена рационална функција својих аргумената, а $n_1, \ldots, n_k$ су природни бројеви. Нека је $n =$НЗС$(n_1, \ldots, n_k)$. Уводи се смена:

$$t^n = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

Тада је

$$x = \frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n} = \varphi(t),$$
$$dx = \varphi'(t)dt,$$

па се наведени интеграл своди на интеграл рационалне функције.

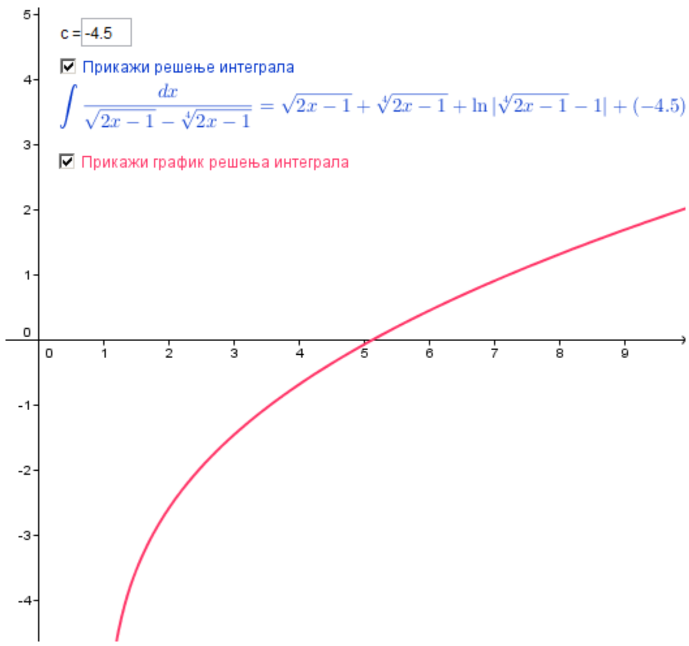
Пример 26. *Решити интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$.

Решење. Тражени интеграл је интеграл ирационалне функције. Као што је речено, уводи се смена $t = \sqrt[4]{2x-1}$ и одатле ће бити $dx = 2t^3 dt$. Након уведене смене добија се интеграл рационалне функције:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2t^3}{t(t-1)}dt = 2\left(\int (t+1)dt + \int \frac{dt}{t-1}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + c = t^2 + 2t + 2\ln|t-1| + c = \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2\ln|\sqrt[4]{2x-1} - 1| + c.$$

△



Слика 24: *Аплет на којем се за унету вредност константе с приказује одговарајуће решење интеграла*

Биће размотрен и случај када је поткорена величина полином другог степена. Тада се уводе Ојлерове[17] смене. Нека је дат интеграл облика

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx. \tag{2}$$

Прва Ојлерова смена

У случају да је $a > 0$, уводи се смена $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$. Уколико се квадрирају обе стране једнакости, добија се да је $x = \dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} = R_1(t)$. Одавде је $dx = R_1'(t)dt$ и интеграл (2) се своди на интеграл рационалне функције.

Пример 27. *Решити интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решење. Како је број који стоји уз x^2 већи од нуле, уводи се смена $\sqrt{x^2-x+1} = x+t$. Одавде је $x = \dfrac{1-t^2}{2t+1}$, односно, $dx = \dfrac{-2t^2-2t-2}{(2t+1)^2}dt$. Добија се:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = -2\int \frac{t^2+t+1}{(2t+1)(t+2)}dt = \int -dt + \int \frac{3t}{(2t+1)(t+2)}dt =$$

$$-t - \int \frac{dt}{2t+1} + 2\int \frac{dt}{t+2} = -t - \frac{1}{2}\ln|2t+1| + 2\ln|t+2| + c.$$

Коначно решење се добија када се стави да је $t = \sqrt{x^2-x+1} - x$. △

Друга Ојлерова смена

У случају када је $c > 0$, уводи се смена $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$. Квадрирањем се добија да је $x = \dfrac{b-2t\sqrt{c}}{t^2-a} = R_2(t)$. Одавде је $dx = R_2'(t)dt$ и интеграл (2) се своди на интеграл рационалне функције.

Трећа Ојлерова смена

Ако су x_1, x_2 међусобно различити реални корени квадратне једначине $ax^2+bx+c = 0$ онда се сменом $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$ интеграл (2) своди на интеграл рационалне функције. Тада је $x = \dfrac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2} = R_3(t)$, односно, $dx = R_3'(t)dt$.

Прва и трећа Ојлерова смена су довољне за налажење било ког интеграла типа (2).

Пример 28. *Решити интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

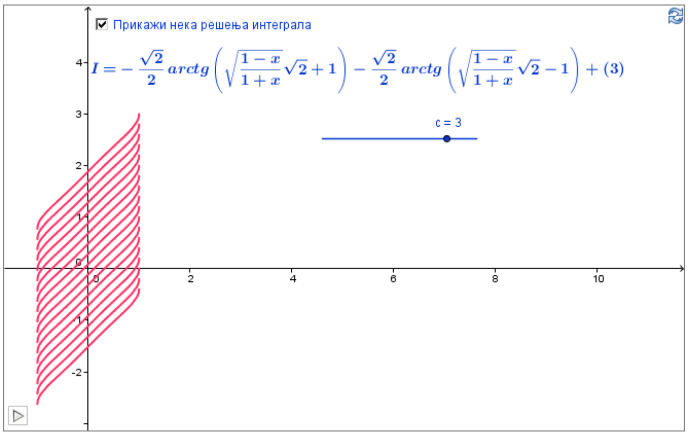
Решење. Овде се појављује поткорена величина која има две реалне нуле. Према томе, уводи се трећа Ојлерова смена, $\sqrt{1-x^2} = t(x+1)$. Одавде је $x = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}$ и $dx = \dfrac{-4tdt}{(t^2+1)^2}$. Након уведене смене добија се решење:

$$-\int \frac{t^2+1}{t^4+1}dt = -\int \frac{t^2+1}{(t^2-t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)}dt =$$

[17] Леонард Ојлер(нем. Leonhard Euler, 1707-1783), швајцарски математичар и физичар

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + t\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - t\sqrt{2}+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}arctg(t\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{2}arctg(t\sqrt{2}-1) + c.$$

Коначно решење добија се када се стави да је $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. $\triangle$



Слика 25: *Аплет на којем се за различите вредности константе c приказује промена решења интеграла*

Постоје случајеви када је могуће избећи Ојлерову смену. Нека је дат интеграл облика

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

где је $P_n(x)$ полином степена n, онда се тај интеграл може решити применом формуле

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где је $Q_{n-1}(x)$ полином степена $n-1$, а λ број. Уколико се изврши операција диференцирања на обе стране наведене једнакости могу се добити константе полинома $Q_{n-1}(x)$ и константа λ.

Пример 29. *Применом наведене формуле решити интеграл* $\int \frac{2x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+4x-3}}dx.$

Решење. Тражени интеграл може се разложити по формули:

$$\int \frac{2x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+4x-3}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+4x-3} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-3}}.$$

Након диференцирања обе стране једнакости добија се следеће:

$$\frac{2x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+4x-3}} = A\cdot\sqrt{x^2+4x-3} + (Ax+B)\cdot\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x-3}}.$$

Свођењем на заједнички именилац добија се да је:

$$2x^2+5x+1 \equiv A(x^2+4x-3) + (Ax+B)(x+2) + \lambda,$$

односно,

$$2x^2 + 5x + 1 \equiv 2Ax^2 + (6A + B)x + (-3A + 2B + \lambda).$$

Изједначавањем коефицијената уз одговарајуће степене променљиве x, добија се систем:

$$2A = 2,$$

$$6A + B = 5,$$

$$-3A + 2B + \lambda = 1.$$

Решење система једначина је $A = 1, B = -1, \lambda = 6$. Дакле, почетни интеграл се може записати у облику:

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x - 3}} dx = (x - 1)\sqrt{x^2 + 4x - 3} + 6 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 - 7}} =$$

$$= (x - 1)\sqrt{x^2 + 4x - 3} + 6 \ln |x + 2 + \sqrt{(x + 2)^2 - 7}| + c.$$

$\triangle$

3.3.3 Интеграција тригонометријских функција

Нека је дат интеграл облика $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где је R рационална функција својих аргумената. Овај интеграл може се свести одговарајућим сменама на интеграл рационалне функције.

1) Смена $t = tg\dfrac{x}{2}$

Ако је $tg\dfrac{x}{2} = t$ онда је $x = 2arctgt$. Уколико се диференцирају обе стране наведене једнакости добија се

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Сада је потребно изразити функције $\sin x$ и $\cos x$ преко t.

$$\sin x = \frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Уколико се и бројилац и именилац поделе са $\cos^2 \frac{x}{2}$ добија се да је:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

На исти начин добија се да је $\cos x$ једнако:

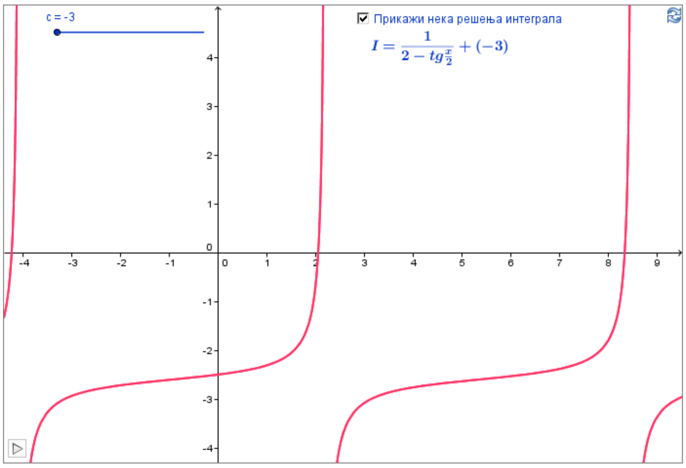
$$\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Пример 30. *Увођењем смене* $t = tg\frac{x}{2}$ *решити интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$.

Решење. Увођењем тражене смене, добија се:

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=\int \frac{dt}{t^2-4t+4}=\int \frac{dt}{(t-2)^2}=-\frac{1}{t-2}+c=\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+c.$$

$\triangle$



Слика 26: *Аплет на којем се за различите вредности константе с приказује промена решења интеграла*

У неким случајевима постоје погодније смене, које ће овде бити размотрене.

2) Смена $t = tgx$

Ако је $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ онда се интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ своди на интеграл рационалне функције сменом $t = tgx$. Одавде је $x = arctgt$, па је $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Потребно је сада изразити функције $\sin x$ и $\cos x$ преко t.

$$\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+t^2}.$$

Одавде је:

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Вредност $\sin x$ добија се из тригонометријског идентитета $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Биће:

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Пример 31. *Увођењем смене $t = tgx$ решити интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

Решење. Увођењем тражене смене добија се:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int \frac{dt}{t^4}+\int \frac{2dt}{t^2}+\int dt=$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3}-2\cdot\frac{1}{t}+t+c=tgx-\frac{2}{tgx}-\frac{1}{3tg^3x}+c.$$

$\triangle$

3) Смена $t = \sin x$

Ако је $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ тј. ако је дата рационална функција непарна по $\cos x$ тада је најбоља смена $t = \sin x$.

Пример 32. *Увођењем одговарајуће смене решити интеграл* $\displaystyle\int \frac{\sin 2x + \cos x}{\sin^2 x + 1} dx$.

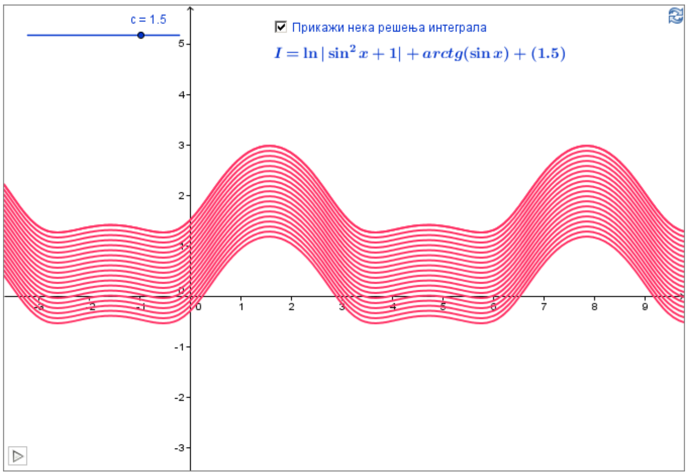
Решење. Овде ће прво бити примењена адициона формула за синус двоструког угла. Добија се:

$$\int \frac{\sin 2x + \cos x}{\sin^2 x + 1} dx = \int \frac{2\sin x \cos x + \cos x}{\sin^2 x + 1} dx$$

Подинтегрална функција је непарна по функцији $\cos x$, па ће бити уведена смена $t = \sin x$. Добија се да је почетни интеграл онда једнак:

$$\int \frac{2t+1}{t^2+1} dt = \ln|t^2+1| + arctgt + c = \ln|\sin^2 x + 1| + arctg(\sin x) + c.$$

△



Слика 27: *Аплет на којем се за различите вредности константе c приказује промена решења интеграла*

4) Смена $t = \cos x$

Уколико је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ тј. ако је дата рационална функција непарна по $\sin x$, тада је најбоља смена $t = \cos x$.

Пример 33. *Увођењем одговарајуће смене решити интеграл* $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Решење. Може се уочити да је подинтегрална функција непарна по функцији $\sin x$, па ће бити уведена смена $t = \cos x$. Добија се:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx = \int (t^4 - t^2) dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + c = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

△

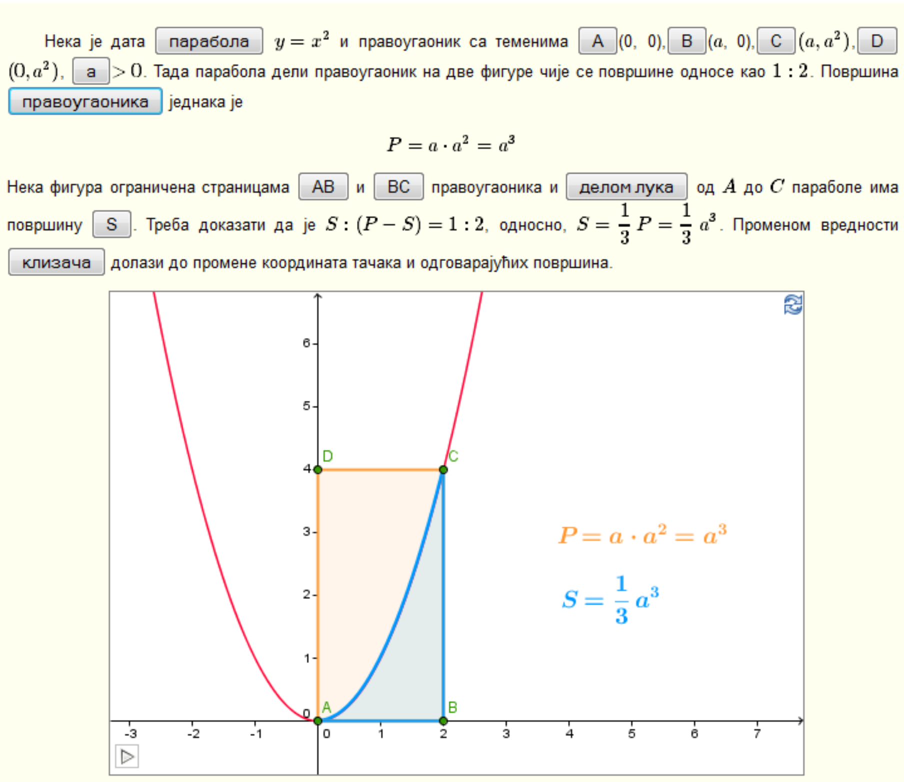
4 Одређени интеграл

Одређени интеграл, као што је приказано у историјском уводу, настаје хронолошки пре појма неодређеног интеграла. Појам неодређеног интеграла се ослања на појам извода и не представља неки нови основни појам, мада омогућава олакшан рад са одређеним интегралима. Већ је поменуто да су се антички народи у суштини користили неким специјалним случајевима одређеног интеграла. Овде ће бити приказан проблем квадратуре параболе као један од значајних Архимедових резултата уз употребу савремених ознака. Тај резултат се може сматрати једним од првих значајних резултата математичке анализе. При томе ће бити коришћен појам лимеса низа реалних бројева.

Проблем квардратуре параболе

Коришћењем програмског пакета ГеоГебра направљени су интерактивни аплети на којима је илустрован проблем квадратуре параболе корак по корак. Притиском на дугмиће на веб страници, на аплету се појављују одговарајући садржаји.

Нека је дата парабола $y = x^2$ и правоугаоник са теменима $A(0,0), B(a,0), C(a,a^2), D(0,a^2), a > 0$. Тада парабола дели правоугаоник на две фигуре чије се површине односе као 1:2. На слици 28. приказана је парабола и дати правоугаоник, као и њихове површине. Притиском на дугме ,,клизача” на аплету приказаном на слици 28. долази до промене дужине странице a, а самим тим и до промене површине правоугаоника и шрафираног дела испод параболе.



Слика 28: *Интерактивни аплет на којем је приказана површина наведених фигура*

Површина правоугаоника једнака је

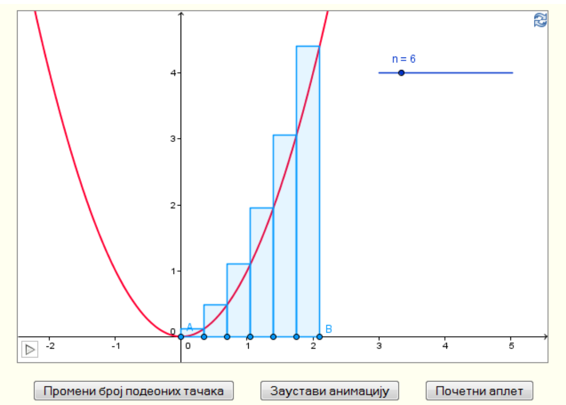
$$P = a \cdot a^2 = a^3.$$

Нека је S површина шрафиране фигуре, ограничене страницама AB и BC правоугаоника и делом лука параболе од A до C. Треба доказати да је $S : (P-S) = 1 : 2$, односно,

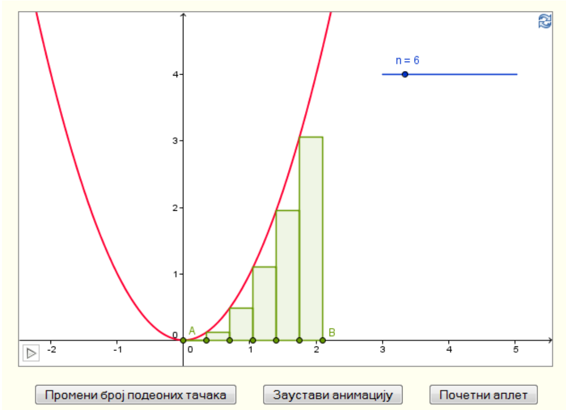
$$S = \frac{1}{3}P = \frac{1}{3}a^3.$$

Нека је n природан број. Одсечак $[0, a]$ осе Ox биће подељен на n једнаких одсечака: $\left[0, \frac{a}{n}\right], \left[\frac{a}{n}, 2\frac{a}{n}\right], \cdots, \left[(n-1)\frac{a}{n}, a\right]$; сваки од ових одсечака има дужину $\frac{a}{n}$. Над сваким од ових одсечака потребно је конструисати два правоугаоника: „описани”, чије десно горње теме припада параболи, и „уписани”, чије лево горње теме припада параболи.

На слици 29. и слици 30. приказани су аплети са описаним, односно уписаним, правоугаоницима, а притиском на дугме „Промени број подеоних тачака” долази истовремено и до промене броја правоугаоника.



Слика 29: *Описани правоугаоници*



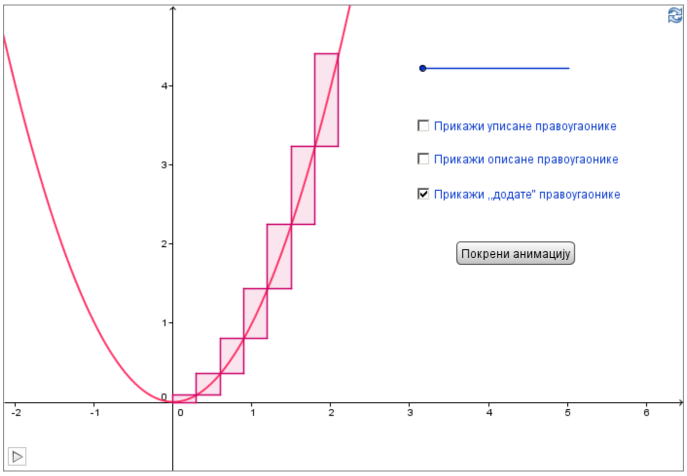
Слика 30: *Уписани правоугаоници*

Висине описаних правоугаоника, једнаке су, редом: $\left(\frac{a}{n}\right)^2, \left(2\frac{a}{n}\right)^2, \ldots, \left((n-1)\frac{a}{n}\right)^2$, $\left(n\frac{a}{n}\right)^2$, па су и њихове површине једнаке, редом: $\frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^2, \frac{a}{n}\left(2\frac{a}{n}\right)^2, \cdots, \frac{a}{n}\left((n-1)\frac{a}{n}\right)^2$, $\frac{a}{n}\left(n\frac{a}{n}\right)^2$. Одатле следи да је збир Po површина описаних правоугаоника једнак

$$P_O = \left(\frac{a}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2) =$$

$$= \left(\frac{a}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = a^3 \cdot \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}.$$

Површина сваког од уписаних правоугаоника једнака је разлици површина одговарајућег описаног правоугаоника и „додатог”правоугаоника.



Слика 31: *Додати правоугаоници*

Сваки од додатих правоугаоника има једну од страница дужине $\dfrac{a}{n}$, док је збир дужина њихових других страница једнак a^2. Притиском на дугме ,,Покрени анимацију" на аплету приказаном на слици 31. додати правоугаоници се ,,слажу" у један велики правоугаоник чије су странице дужине $\dfrac{a}{n}$ и a^2. Због тога је збир P_D површина додатих правоугаоника једнак $\dfrac{a}{n} \cdot a^2 = \dfrac{a^3}{n}$. Онда је збир P_U површина уписаних правоугаоника једнак разлици $P_O - P_D$, односно

$$P_U = \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2} - \frac{a^3}{n} = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}.$$

Очигледно је

$$P_U < S < P_O,$$

дакле

$$\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2} < S < \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2},$$

због чега је

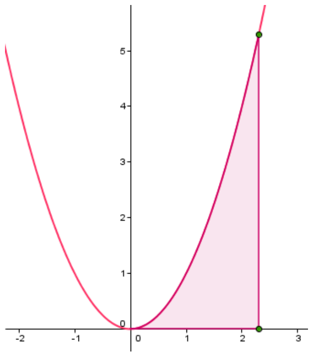
$$-\frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2} < S - \frac{a^3}{3} < \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}.$$

Ове неједнакости су тачне за сваки природан број n. Пошто је

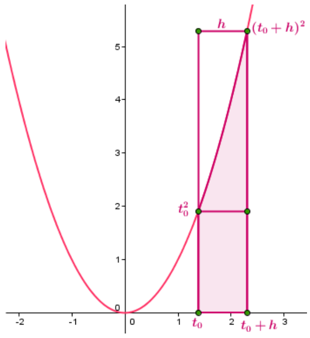
$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2} \right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2} \right) = 0,$$

може се закључити да је $S = \dfrac{a^3}{3}$, што је и требало доказати.

Сада када је позната површину S тражене фигуре могуће је повезати проблем квадратуре параболе са појмом примитивне функције. Нека је дата парабола $y = x^2$. Биће нађена површина $S(t)$ фигуре у равни која је ограничена осом Ox, правом $x = t, t \geq 0$ и делом лука параболе за $0 \leq x \leq t$.



Слика 32: *Тражена површина*



Слика 33: *Криволинијски трапез када је $h > 0$*

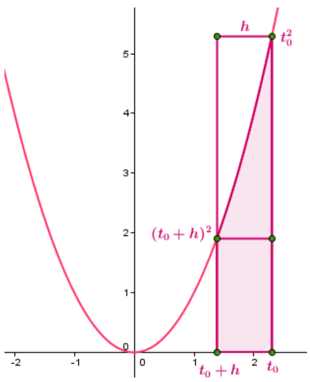
Функција $S(t)$ је дефинисана за свако $t \geq 0$ и нека је то одређени позитиван број. Биће израчуната разлика $S(t_0 + h) - S(t_0)$. Ако је $h > 0$, то је површина криволинијског трапеза приказаног на слици 33. Она је већа од одговарајућег уписаног правоугаоника и мања од површине одговарајућег описаног правоугаоника. Дакле,

$$t_0^2 \cdot h < S(t_0 + h) - S(t_0) < (t_0 + h)^2 \cdot h, \tag{3}$$

односно,

$$t_0^2 < \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} < (t_0 + h)^2.$$

Ако је $h < 0$, а $t_0 + h > 0$, тада ће $S(t_0) - S(t_0 + h)$ бити површина криволинијског трапеза приказаног на слици 34.



Слика 34: *Криволинијски трапез када је $h < 0$*

Површина ће онда бити између:

$$(t_0 + h)^2 \cdot h < S(t_0) - S(t_0 + h) < t_0^2 \cdot h,$$

односно, пошто је $h < 0$:

$$(t_0 + h)^2 \cdot h > S(t_0 + h) - S(t_0) > t_0^2 \cdot h.$$

Дакле, важиће:

$$(t_0 + h)^2 < \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} < t_0^2. \tag{4}$$

Из формула (3) и (4) следи да постоји

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

и да је он једнак t_0^2. Функција $S(t)$ ће имати у свакој тачки t_0 извод $S'(t_0) = t_0^2$, што значи да је $S(t)$ примитивна функција за функцију t^2. Одавде је $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + c, t \geq 0$. Како је $S(0) = 0$, добија се да је и $c = 0$, па је

$$S(t) = \frac{1}{3}t^3, t \geq 0.$$

За $t = a$, ово је формула $S = \frac{1}{3}a^3$, добијена приликом решавања проблема квадратуре параболе Архимедовом методом.

4.1 Мотивација за увођење одређеног интеграла

Иако се појам одређеног интеграла ослања на појам извода, он историјски настаје пре њега. Поједини проблеми из физике и геометрије воде до појма одређеног интеграла. Овде ће бити размотрен проблем површине. Потребно је прво дефинисати фигуру која се зове криволинијски трапез. Криволинијски трапез је фигура у равни која је ограничена са три дужи и једним луком непрекидне криве, при чему су две од тих дужи паралелне, а трећа на њих нормална и праве које су паралелне имају са луком криве највише једну заједничку тачку. У специјалном случају једна или обе од паралелних дужи може да се сведе на једну тачку и тада се добија криволинијски троугао. Поједине фигуре у равни биће могуће разложити на неколико криволинијских трапеза или троуглова, али постојаће и оне које није могуће разложити на овај начин. Уколико је фигуру F могуће разложити на две фигуре F_1 и F_2 и ако те фигуре имају површине $P(F_1)$ и $P(F_2)$, онда ће површина фигуре F бити

$$P(F) = P(F_1) + P(F_2).$$

Нека је у равни дат криволинијски трапез F.

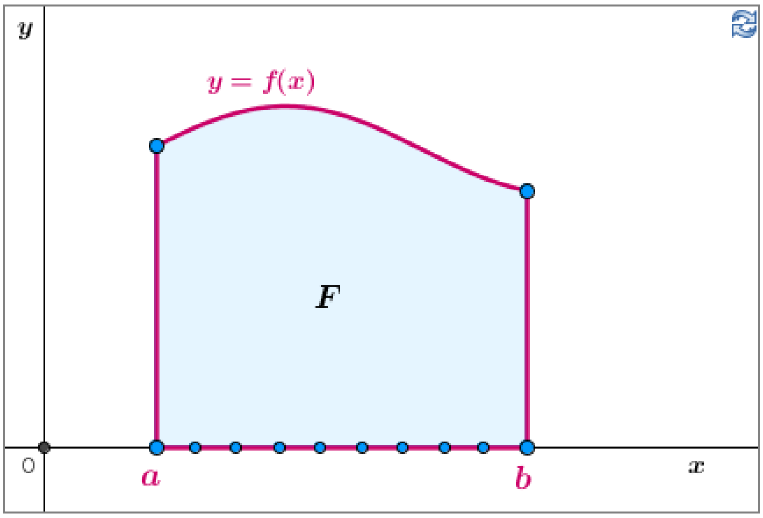
Нека је у тој равни дат координатни систем xOy тако да страница тог трапеза која се налази наспрам његове криволинијске странице припада оси Ox. Трапез се налази „изнад" осе Ox. Нека је $y = f(x), x \in [a, b]$, функција чији је график криволинијска страница трапеза, при чему су a и b апцисе крајева странице трапеза која припада оси Ox.
Нека су $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ апцисе тачака на оси Ox, такве да је

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Тим тачкама је подељен одсечак $[a, b]$ на следеће пододсечке

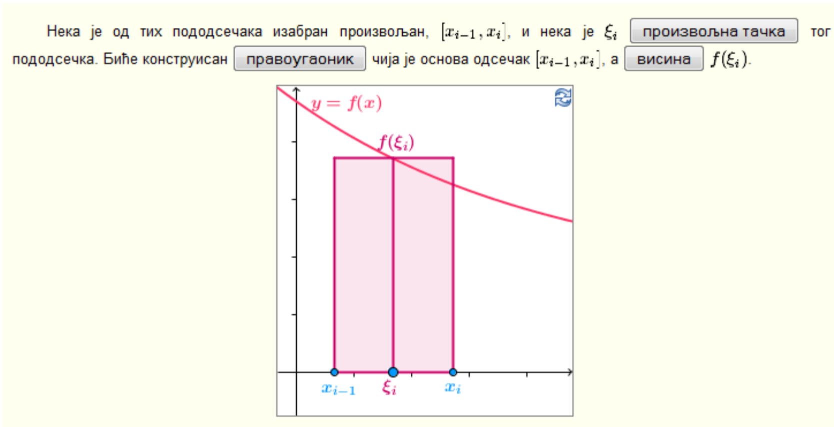
$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

па се уређена $(n+1)$-торка $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ зове подела одсечка $[a, b]$ и то се записује као $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$.



Слика 35: *Криволинијски трапез са поделом*

Нека је од тих пододсечака изабран произвољан, $[x_{i-1}, x_i]$, и нека је ξ_i произвољна тачка тог пододсечка. Биће конструисан правоугаоник чија је основа одсечак $[x_{i-1}, x_i]$, а висина $f(\xi_i)$. На слици 36. приказан је интерактивни аплет на којем се притиском на дугмиће појављују одговарајући садржаји описани у наведеној конструкцији.



Слика 36: *Правоугаоник над одсечком*

Површина овог правоугаоника једнака је

$$P_i = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ако се оваква конструкција изврши над сваким одсечком $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n$, добија се фигура S чија је површина једнака

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

За дати одсечак $[a, b]$ и дату функцију $f(x)$ облик фигуре S зависиће од поделе $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ одсечка и избора тачака $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n$. Нека је овај избор тачака означен са $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$. Ако су ови одсечци ситни, фигура S се неће много разликовати од криволинијског трапеза

F.

Нека је $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, n$. Онда скуп

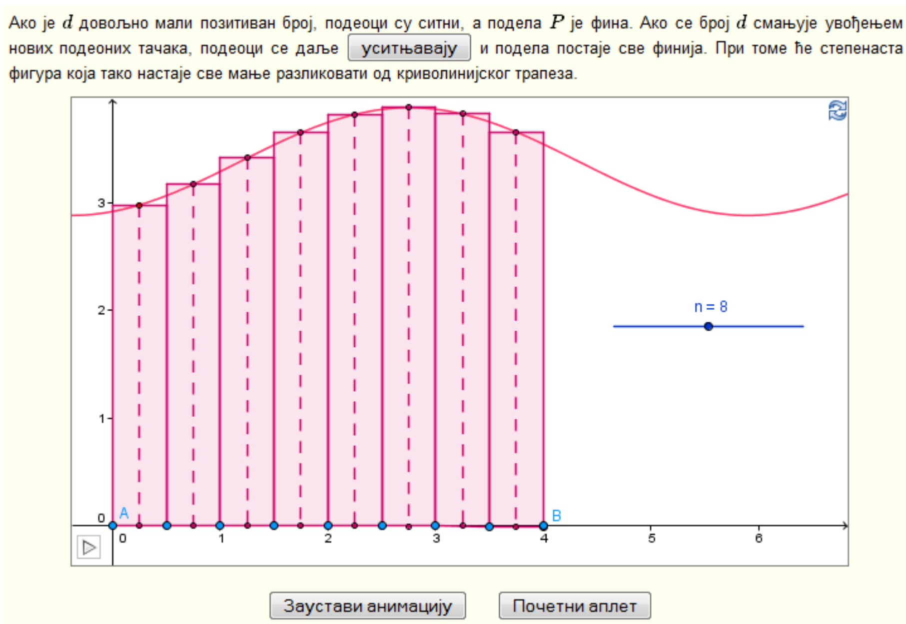
$$\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$$

представља коначан скуп позитивних реалних бројева, па он садржи свој највећи елемент

$$d = d(P) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}.$$

Ако је d довољно мали позитиван број, подеоци су ситни, а подела P је „фина”. Ако се број d смањује увођењем нових подеоних тачака, подеоци се даље уситњавају и подела постаје све финија. При томе ће се добијена степенаста фигура која тако настаје све мање разликовати од криволинијског трапеза.

На аплету приказаном на слици 37. притиском на дугме „уситњавају” које се налази у тексту, почиње да се повећава број подеоних тачака, као и конструисаних правоугаоника и на тај начин се добијена фигура све више приближава криволинијском трапезу.



Слика 37: *Аплет на којем је приказана степенаста фигура уз повећање броја правоугаоника*

Дефиниција 3. *Реалан број S је* ***површина*** *криволинијског трапеза F ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, такво да је за све поделе P за које је $d(P) < \delta$ и за сваки избор тачака $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ у одговарајућим пододсечцима испуњено*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - S \right| < \varepsilon,$$

односно,

$$P(F) = S = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

У књизи [5] се могу погледати разматрања других проблема који воде до појма одређеног интеграла. Уколико се резултати добијени решавањем тих проблема упореде, уочава се аналогија из које се може закључити да добијене формуле говоре о истом апстрактном појму, без обзира на физичку и геометријску интерпретацију.

4.2 Дефиниција одређеног интеграла

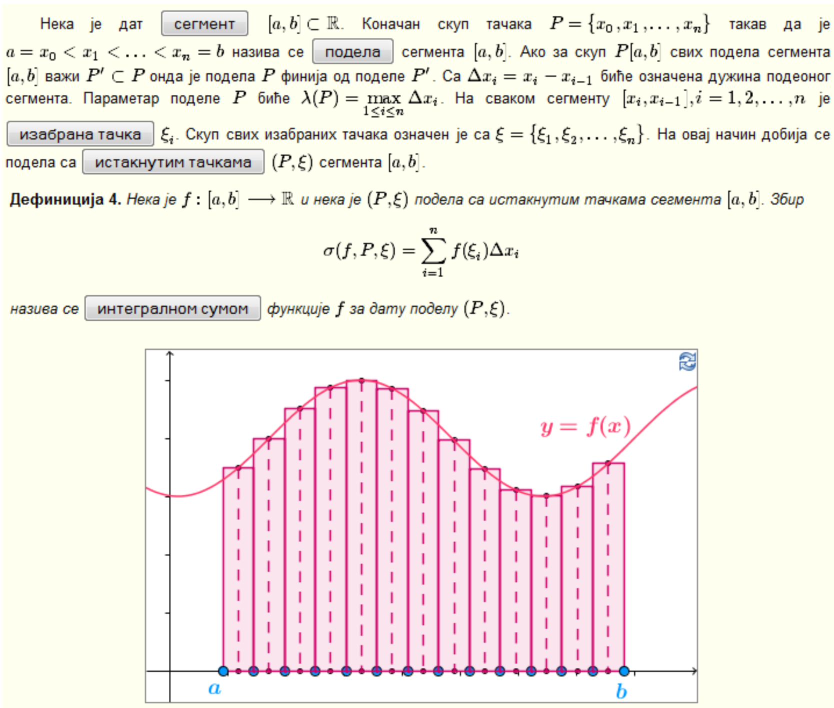
Нека је дат сегмент $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Коначан скуп тачака $P = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ такав да је $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ назива се поделом сегмента $[a,b]$. Ако за скуп $P[a,b]$ свих подела сегмента $[a,b]$ важи $P' \subset P$ онда је подела P финија од поделе P'. Са $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ биће означена дужина подеоног сегмента. Параметар поделе P биће $\lambda(P) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. На сваком сегменту $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$, је изабрана тачка ξ_i. Скуп свих изабраних тачака означен је са $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. На овај начин добија се подела са истакнутим тачкама (P, ξ) сегмента $[a,b]$.

Дефиниција 4. *Нека је $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ и нека је (P,ξ) подела са истакнутим тачкама сегмента $[a,b]$. Збир*

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

назива се интегралном сумом функције f за дату поделу (P,ξ).

Наведена дефиниција, као и увод у њу, интерактивно су приказани у склопу наведене веб странице. Притиском на одговарајуће дугме долази до геометријског приказа наведених појмова, а слика аплета, као и дела веб странице где се налазе одговарајући дугмићи повезани са аплетом могу се видети на слици 38.



Слика 38: *Дефиниција одређеног интеграла*

Дефиниција 5. *За број I се каже да је лимес (гранична вредност) интегралних сума $\sigma(f,P,\xi)$ функције $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ кад $\lambda(P)\longrightarrow 0$ и пише се*

$$\lim_{\lambda(P)\longrightarrow 0}\sigma(f,P,\xi)=I,$$

ако за свако $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$, тако да за сваку поделу са истакнутим тачкама $(P,\xi)\in P[a,b]$ важи неједнакост

$$|\sigma(f,P,\xi)-I|<\varepsilon,$$

кад је $\lambda(P)<\delta$.

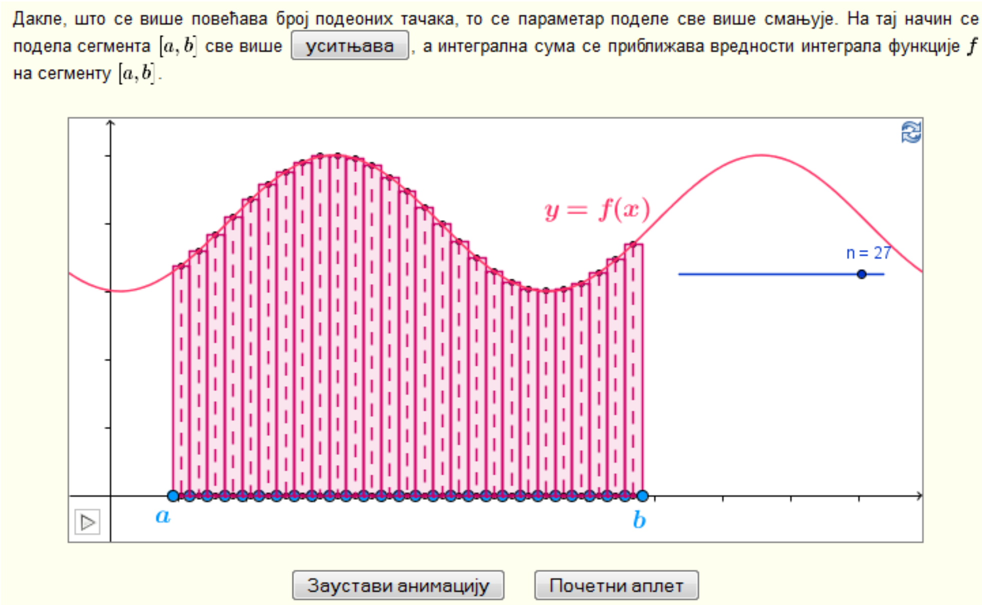
Ако $\lim\limits_{\lambda(P)\longrightarrow 0}\sigma(f,P,\xi)$ постоји и коначан је, онда се каже да је функција f интеграбилна у Римановом смислу на сегменту $[a,b]$. Број $I=\lim\limits_{\lambda(P)\longrightarrow 0}\sigma(f,P,\xi)$ назива се Римановим интегралом функције f на сегменту $[a,b]$ и пише се

$$I=\int_a^b f(x)dx.$$

Број a представља **доњу границу** интеграла, број b представља **горњу границу** интеграла, функција f назива се **подинтегралном функцијом**, а израз $f(x)dx$ **подинтегралним изразом.**

Скуп свих функција интеграбилних у Римановом смислу на сегменту $[a,b]$ означава се са $\mathcal{R}[a,b]$ и такве функције се називају интеграбилним функцијама.

На слици 39. приказан је аплет на којем се, притиском на дугме на коме пише ,,уситњава", повећава број подеоних тачака, смањује се подеони сегмент и креирани правоугаоници се све више приближавају криволинијском трапезу који гради функција f.



Слика 39: *Аплет на којем је приказано повећање броја подеоних тачака и приближавање фигуре коју граде правоугаоници криволинијском трапезу*

Став 4. *Потребан услов да функција f буде интеграбилна на сегменту $[a,b]$ јесте да функција f буде ограничена на сегменту $[a,b]$.*

Из става 4. се закључује да из Риман интеграбилности следи ограниченост, док обрнуто не мора да важи.

Доказ. Тврђење се негира. Нека је функција неограничена, али и Риман интеграбилна. Пошто је функција Риман интеграбилна важи:

$$\lim_{\lambda(P)\longrightarrow 0} \sigma(f,P,\xi) = I.$$

За свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да важи:

$$|\sigma(f,P,\xi) - I| < \varepsilon, \forall \lambda(P) < \delta.$$

Нека је изабрана једна подела P за коју ће ово да важи. Пошто је дата претпоставка да функција није ограничена, постоји један подеони сегмент на коме f није ограничена и постоји Δx_k такво да то важи. Интегрална сума је ограничена:

$$I - \varepsilon < \sigma(f,P,\xi) < I + \varepsilon.$$

Такође, интегрална сума се може записати и као

$$\sigma(f,P,\xi) = f(\xi_k)\cdot\Delta x_k + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

Која год вредност да се узме за ξ_k, $f(\xi_k)$ ће се приближити бесконачности. Зато $f(\xi_k)\Delta x_k$ може бити произвољно велико (мало), што значи да га је немогуће ограничити са $I+\varepsilon$ или $I-\varepsilon$. Пошто је немогуће да збир ограничене величине и неограничене буде ограничен, као што је претпостављено на почетку задатка, долази до контрадикције. Тиме је доказано да полазна претпоставка није тачна тј. да свака Риман интеграбилна функција мора бити ограничена. □

Пример 34. *На примеру Дирихлеове функције биће приказано да ако је функција ограничена не мора бити Риман интеграбилна.*

Решење. Нека је дата Дирихлеова функција на сегменту $[a,b]$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ова функција има прекид у свакој тачки. Нека је дата претпоставка да је она Риман интеграбилна. Тада ће интегрална сума у тачкама које припадају скупу рационалних бројева бити $\sigma(f,P,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = b-a$, а у тачкама које нису рационални бројеви ће бити $\sigma(f,P,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0$. Одавде следи да лимес ове суме не постоји па Дирихлеова функција није интеграбилна на $[a,b]$. △

У вези са интегралном сумом стоје Дарбуове суме. Нека је функција f дефинисана и ограничена на сегменту $[a, b]$ и нека је $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ подела тог сегмента. Нека су m_i, односно, m и M_i, односно, M:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), m = \inf_{x \in [a,b]} f(x);$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Сума $s = s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ назива се доњом Дарбуовом сумом, а $S = S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ горњом Дарбуовом сумом функције f на сегменту $[a, b]$.

Став 5. *Ако је функција f ограничена на сегменту $[a, b]$ тада за интегралну и Дарбуове суме важи:*

1. $m(b - a) \leq s(f, P) \leq \sigma(f, P, \xi) \leq S(f, P) \leq M(b - a)$;
2. $\inf_{\xi} \sigma(f, P, \xi) = s(f, P), \sup_{\xi} \sigma(f, P, \xi) = S(f, P)$.

Доказ овог става може се видети у књизи [1]. Како су Дарбуове суме ограничене, важиће да постоје коначни $\sup_P s(f, P)$ и $\inf_P S(f, P)$. Доња Дарбуова сума је ограничена одозго са M_i, па има свој супремум, а горња Дарбуова сума је ограничена одоздо па има свој инфимум. Нека је

$$\underline{I} = \sup_P s(f, P)$$

доњи Дарбуов интеграл, а

$$\overline{I} = \inf_P S(f, P)$$

горњи Дарбуов интеграл функције f на сегменту $[a, b]$. Сада ће бити наведена Дарбуова теорема и једна њена последица која тврди да су горњи и доњи Дарбуов интеграл уједно и лимеси одговарајућих сума.

Теорема 6. *За ограничену функцију f на сегменту $[a, b]$ важи*

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P) \longrightarrow 0} s(f, P), \overline{I} = \lim_{\lambda(P) \longrightarrow 0} S(f, P).$$

Последица 7. *Важе следећа два тврђења:*

1. *Ограничена функција на сегменту је интеграбилна ако и само ако јој се доњи и горњи Дарбуов интеграл поклапају.*
2. *Ограничена функција f је интеграбилна на сегменту $[a, b]$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји подела P тог сегмента таква да је $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.*

4.3 Интеграбилност

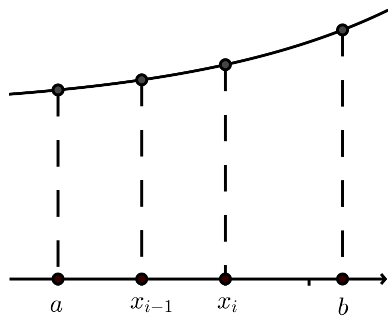
У овом делу биће наведена формулација и геометријска интерпретација појединих теорема везаних за одређени интеграл и појам интеграбилности.

Теорема 8. *Свака непрекидна функција на сегменту $[a, b]$ је Риман интеграбилна на том сегменту.*

Доказ ове теореме може се видети у књизи [1].

Став 6. *Свака монотона функција на сегменту је Риман интеграбилна.*

Доказ. Нека је функција f растућа на сегменту $[a, b]$ и $f \neq const$.



Слика 40: *Растућа функција са једним подеоним сегментом*

За дато $\varepsilon > 0$ нека је P подела сегмента $[a, b]$ тако да је $\lambda(P) < \delta$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Тада је:

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

□

Теорема 9. *Нека је функција f ограничена и непрекидна на сегменту $[a, b]$, сем у коначно много тачака прекида. Тада је f интеграбилна на $[a, b]$.*

Доказ ове теореме може се видети у књизи [1].

4.4 Својства одређеног интеграла

4.4.1 Линеарност интеграла

Теорема 10. *Нека су функције $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада је $f \pm g \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$. При томе важе једнакости*

1. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$

2. $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$

Доказ. Интегрална сума интеграла $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$ биће записана у облику:

$$\sigma(f \pm g, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \sigma(f, P, \xi) \pm \sigma(g, P, \xi).$$

Како је $\lim\limits_{\lambda(P)\longrightarrow 0} \sigma(f, P, \xi) = \int_a^b f(x)dx$, $\lim\limits_{\lambda(P)\longrightarrow 0} \sigma(g, P, \xi) = \int_a^b g(x)dx$, постојаће и $\lim\limits_{\lambda(P)\longrightarrow 0} \sigma(f \pm g, P, \xi) = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$ па ће важити прва једнакост. Нека је интегрална сума интеграла $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ записана у следећем облику:

$$\sigma(\alpha f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\sigma(f, P, \xi).$$

Преласком на лимес кад $\lambda(P) \longrightarrow 0$ види се да постоји интеграл $\int_a^b \alpha f(x)dx$ и да важи друга једнакост. $\square$

Последица 11. *Ако су $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ и α, β реални бројеви, онда $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$. При томе важи једнакост:*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Теорема 12. *Нека су $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Тада важе следећа тврђења:*

1. $fg \in \mathcal{R}[a, b]$;
2. $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$;
3. $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b]$ *уз услов* $|f(x)| \geq \alpha > 0$ *за* $x \in [a, b]$;
4. $f \in R[\alpha, \beta]$ *ако* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

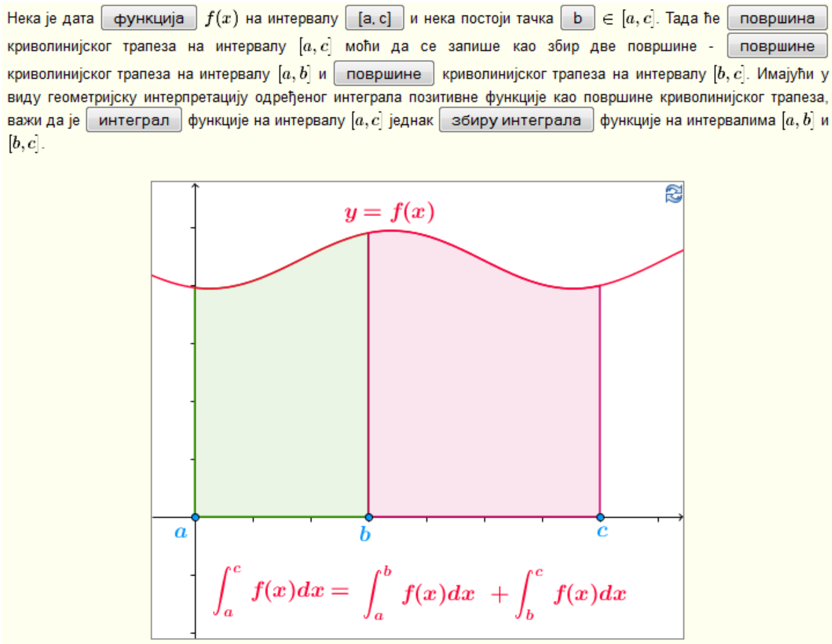
Доказ ове теореме може се видети у [1].

4.4.2 Адитивност интеграла

Став 7. *Ако је функција $f \in \mathcal{R}[a, c]$ и $a < b < c$ онда је $f \in \mathcal{R}[a, b], f \in \mathcal{R}[b, c]$ и при томе важи једнакост*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Доказ наведене теореме може се видети у [1]. Имајући у виду геометријску интерпретацију одређеног интеграла позитивне функције као површине криволинијског трапеза, овде ће бити наведена и геометријска интерпретација дате теореме. Приказана је слика аплета на којем, као и раније, притиском на одговарајуће дугмиће, долази до креирања слике која представља геометријску интерпретацију наведене теореме.



Слика 41: *Геометријска интерпретација теореме о адитивности интеграла*

Приликом дефинисања интеграла $\int_a^b f(x)dx$ важила је претпоставка да је $a < b$. Следећа дефиниција ће омогућити рад са интегралима чија је горња граница већа или једнака са доњом.

Дефиниција 6. *1. Ако је функција f дефинисана у тачки a, онда је* $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. Ако је $a < b$ и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *постоји, онда је*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Став 8. *Нека тачке $a, b, c \in \mathbb{R}$ представљају крајеве трију сегмената. Ако је функција f интеграбилна на највећем од тих сегмената, онда је она интеграбилна и на остала два. При томе важи једнакост:*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Доказ. Тврђење о интеграбилности функције следи из последње ставке теореме 12. Нека је $a < c < b$. На основу става 7. је:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

тј.

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

Уколико се узме у обзир претходна дефиниција, добија се

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Слично се поступа и у осталим случајевима.[18] □

Сада ће бити размотрени неки случајеви раздвајања једног на два интеграла.

Пример 35. *Нека је функција $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ непрекидна. Размотрити чему је задати интеграл једнак уколико је функција f парна, односно, уколико је непарна.*

Решење. Познато је да је $f(-x) = f(x)$ уколико је функција f парна, а уколико је непарна онда важи да је $f(-x) = -f(x)$. Овде ће бити размотрена ова два случаја одвојено, користећи се притом наведеним ставом и дефиницијом о адитивности интеграла. За почетак, почетни интеграл ће бити представљен као збир два интеграла. Добија се:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

У први интеграл уводи се смена $x = -t$, одакле је:

$$-\int_a^0 f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx.$$

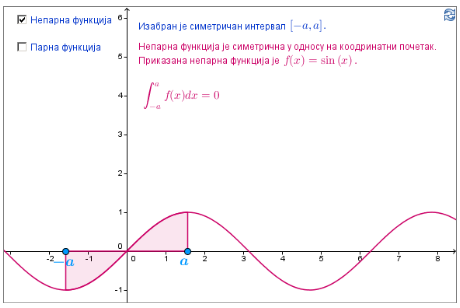
1. Функција f је парна

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

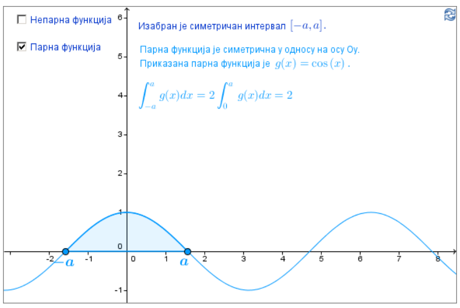
2. Функција f је непарна

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Битно је приметити да су одговарајући интеграли по x и по t једнаки, јер имају исте границе и узимају исти аргумент одговарајуће функције, само је име променљиве различито. △



Слика 42: *Парна функција*



Слика 43: *Непарна функција*

[18] Доказ је преузет из [1]

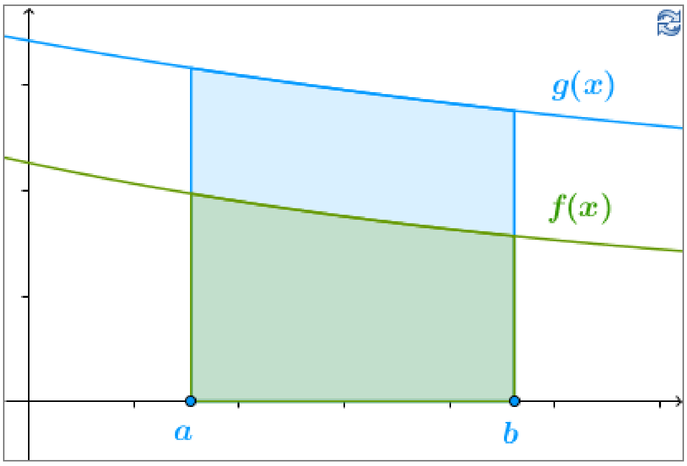
4.4.3 Монотоност интеграла

Став 9. *Ако је* $f \in \mathcal{R}[a,b], a < b$ *и* $f(x) > 0$ *за* $x \in [a,b]$, *онда је* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

Доказ. Како је интегрална сума $\sigma(f,P,\xi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ за свако $(P,\xi) \in \mathcal{P}[a,b]$ ненегативна, па је таква и њена гранична вредност. □

Последица 13. *Ако је* $f(x) \leq g(x), x \in [a,b], a < b$ *и* $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$, *онда је* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

Дата је геометријска интерпретација последице 13. Криволинијски трапез који гради функција g има већу површину од криволинијског трапеза који гради функција f.



Слика 44: *Геометријска интерпретација теореме о монотоности интеграла*

Став 10. *Ако је* $f \in R[a,b], a < b$ *онда важи:*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказ. Из неједнакости $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ и на основу последице 13. следи да је

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

одакле је

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

4.5 Прва теорема о средњој вредности

Теорема 14. *Нека су* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *и* $g(x) \geq 0 (g(x) \leq 0)$ *за* $x \in [a,b]$. *Тада постоји* $\mu \in [m, M]$, *тако да је*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \tag{5}$$

Ако је још $f \in C[a,b]$, *онда постоји* $c \in (a,b)$, *тако да је*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \tag{6}$$

Доказ. Нека је функција g ненегативна. Тада из $m \leq f(x) \leq M$ следи

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), x \in [a,b].$$

Интеграцијом се добија

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Ако је $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$, онда је $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и релација (5) важи. Ако је $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$ онда је

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M,$$

па се за број μ у релацији (5) може узети $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. У случају непрекидности функције f, према Коши-Болцановој теореми о међувредности[19] постоји тачка $c \in (a,b)$, тако да је $f(c) = \mu$, па једнакост (6) важи. □

Уколико се у претходној теореми стави да је $g(x) \equiv 1$, добија се последица наведене теореме.

Последица 15. *Нека је* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. *Тада постоји* $\mu \in [m, M]$ *тако да*

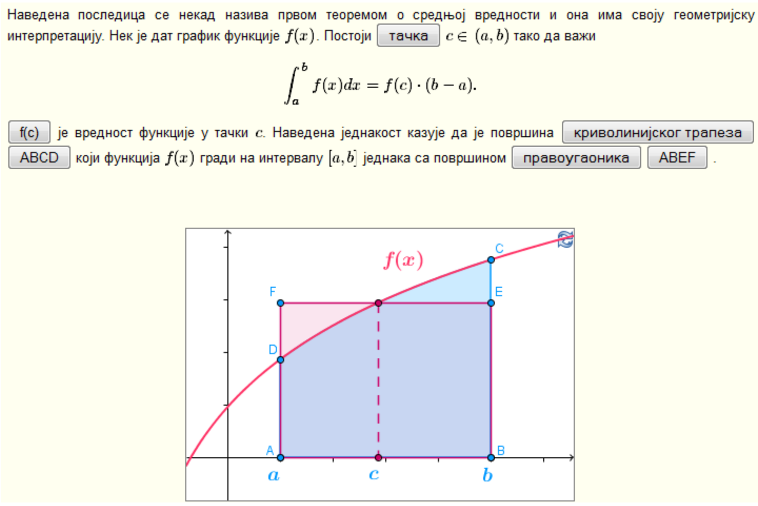
$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \tag{7}$$

Ако је $f \in \mathcal{C}[a,b]$, *онда постоји* $c \in (a,b)$ *тако да важи једнакост*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{8}$$

[19]Ова теорема се може видети у књизи [5]

Ова последица се некад назива првом теоремом о средњој вредности. Сада ће бити размотрено геометријско тумачење ове теореме. На слици 45. је приказан аплет на којем је график функције $f(x)$ и права $y = f(c), c \in (a, b)$. Притиском на одговарајуће дугмиће на веб страници на аплету долази до исцртавања одређених геометријских ликова. Једнакост (8) казује да су површине криволинијског трапеза $ABCD$ и правоугаоника $ABEF$ једнаке.



Слика 45: *Геометријска интерпретација последице прве теореме о средњој вредности*

Пример 36. *Наћи средњу вредност функције* $f(x) = \sin 2x \cdot e^{1-\cos 2x}$ *на интервалу* $[-\pi, \pi]$.

Решење. У овом примеру биће примењена теорема о средњој вредности

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Дакле,

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cdot e^{1-\cos 2x} dx.$$

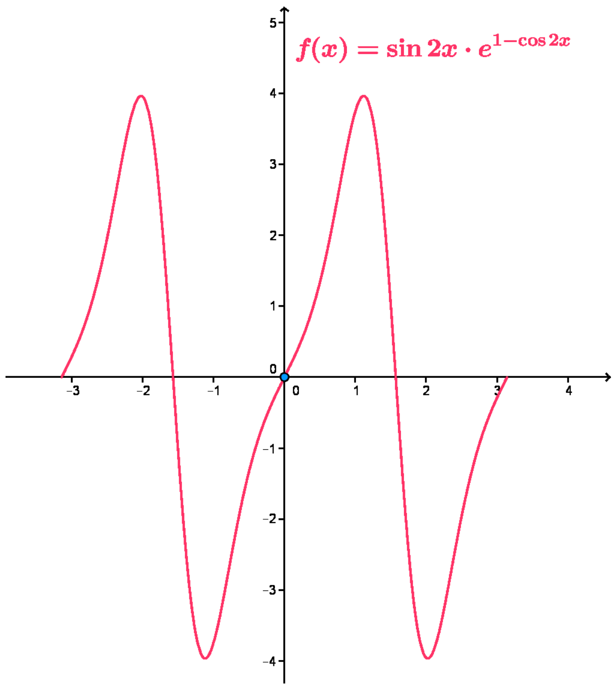
Увођењем смене $t = 1 - \cos 2x$, долази се до решења неодређеног интеграла:

$$\int \sin 2x e^{1-\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{1-\cos 2x}.$$

Сада је могуће наћи средњу вредност функције f.

$$f(c) = \frac{1}{4\pi} e^{1-\cos 2x} \bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Добијена средња вредност функције једнака је 0, што се може видети и на графику наведене функције.



Слика 46: *График функције $f(x)$ из примера 36.*

$\triangle$

Пример 37. *Наћи број c који задовољава теорему о средњој вредности за функцију $f(x) = x^2 + 3x + 2$, на интервалу $[1, 4]$.*

Решење. Функција $f(x)$ је непрекидна на датом интервалу и могуће је применити теорему о средњој вредности.

$$f(c) = \frac{1}{4-1}\int_1^4 (x^2 + 3x + 2)dx,$$

$$f(c) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_1^4.$$

Одавде је

$$3(c^2 + 3c + 2) = \frac{99}{2},$$

одакле се добија да је $c_1 = 2,593$ и $c_2 = -5,593$. Број c_2 не припада задатом интервалу, па ће решење задатка бити c_1. $\triangle$

4.6 Њутн-Лајбницова формула

Као што је већ речено, Исак Њутн и Готфрид Вилхем Лајбниц су крајем 17. века засновали диференцијални и интегрални рачун, независно један од другог. Такође, они су истовремено формулисали и основну теорему калкулуса која ће овде бити наведена. Користећи се том теоремом биће изведена и Њутн-Лајбницова формула која омогућава једноставнији рад са одређеним интегралима.

Нека је функција f интеграбилна на сегменту $[a, b]$. Када x узима вредност из сегента $[a, b]$ онда је

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

функција дефинисана на $[a, b]$. Ова функција често се назива интегралом са промењљивом горњом границом.

Став 11. *Нека је функција $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и нека је $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b]$. Тада:*

1. *функција φ је непрекидна на сегменту $[a, b]$;*
2. *ако је функција f непрекидна у тачки $x \in [a, b]$, онда је φ диференцијабилна у тој тачки. При том важи:*

$$\varphi'(x) = f(x).$$

Доказ. 1. Нека $x, x + h \in [a, b]$. Ако је $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| = M$, према последици теореме о средњој вредности је

$$|\varphi(x + h) - \varphi(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq M|h| \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0,$$

па је функција φ непрекидна у тачки x.

2. Прво ће бити нађен извод $\varphi'(x)$ функције φ у тачки x у којој је функција f непрекидна.

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Нека је $m_h = \inf\limits_{t \in [x,x+h]} f(t)$и $M_h = \sup\limits_{t \in [x,x+h]} f(t)$. Према последици теореме о средњој вредности је

$$m_h \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M_h.$$

Ако је f непрекидна здесна, односно слева, у тачки x, онда $m_h \longrightarrow f(x), M_h \longrightarrow f(x)$ за $h \longrightarrow +0$, односно $h \longrightarrow -0$, па је

$$\lim_{h \longrightarrow +0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x),$$

односно,

$$\lim_{h \longrightarrow -0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

Ако је функција f непрекидна у тачки x, онда је

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x),$$

тј.

$$\varphi'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = f(x).$$

$\square$

Нека је функција $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $x \in [a, b]$, и функција

$$\Phi(x) = \int_x^b f(t)dt.$$

Одавде се може закључити да важи

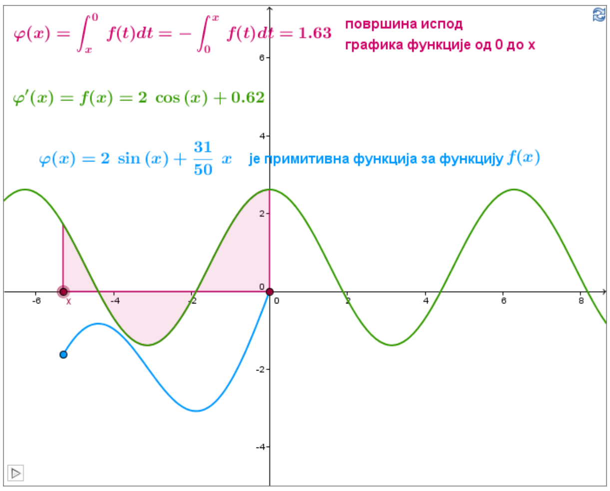
$$\Phi'(x) = \left(-\int_b^x f(t)dt\right)' = -f(x).$$

Последица 16. *Ако је $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција, онда је*

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b],$$

њена примитивна функција.

Следећи аплет приказује интеграл функције са променљивом горњом (доњом) границом и исцртава график функције која представља решење интеграла.



Слика 47: *Аплет на којем је илустрован интеграл са променљивом границом*

Пример 38. *Наћи извод функције $\Phi(x)$ ако је*

а)$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$

б)$\Phi(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2x} \frac{\sin t}{t} dt.$

Решење. Ниједан од ових интеграла се не може решити као неодређен, али то не значи да он не постоји, јер свака непрекидна функција има примитивну.

а) Нека је $\int e^{-t^2}dt = F(t) + c$. Уколико се примени први извод на обе стране наведене једнакости добија се да је $F'(t) = e^{-t^2}$. Како је у питању одређени интеграл, добија се:

$$\Phi(x) = F(t)|_0^x = F(x) - F(0),$$

где је $F(0)$ константа. Дакле, важи да је

$$\Phi'(x) = F'(x) = e^{-x^2}.$$

б) Нека је $\int \frac{\sin t}{t}dt = F(t) + c$. Овде ће се поступити исто као у првом делу задатка: $\Phi(x) = F(t)|_{\frac{\pi}{2}}^{2x} = F(2x) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Одавде је:

$$\Phi'(x) = F'(2x) \cdot 2 = 2F'(2x) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

△

Теорема 17 (Њутн-Лајбницова формула)**.** *Нека је функција f непрекидна на одсечку $[a,b]$ и нека је $F(x)$ било која примитивна функција за $f(x)$ на $[a,b]$. Онда важи:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказ. Нека су $F(x)$ и $\Phi(x)$ примитивне функције за $f(x)$ на $[a,b]$ које се разликују за константу, тј. $\Phi(x) = F(x) + c$. Односно, према основној теореми калкулуса важи:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c.$$

Уколико се стави да је $x = a$, добија се

$$0 = F(a) + c,$$

па је $c = -F(a)$ и

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Ако се узме да је $x = b$ добија се

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

односно, ако се променљива у подинтегралном изразу означи са x добија се

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Иако су Њутн и Лајбниц најзаслужнији за формулацију и проналазак ове формуле, многи математичари почев од Архимеда па на даље дали су велики допринос открићу ове формуле. Њутн-Лајбницова формула се најчешће пише у следећем облику:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 39. *Решити одређени интеграл* $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$

Решење. У овом примеру, прво ће бити израчунат одговарајући неодређени интеграл. Уводи се смена $t = e^x$. Дакле:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + c = arctge^x + c.$$

Нека је $F(x) = arctge^x$. Тада је:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = arctge^x|_0^1 = arctge - arctg1 = arctge - \frac{\pi}{4}.$$

У овом примеру је примењена Њутн-Лајбницова формула и на тај начин је добијено решење одређеног интеграла. △

Пример 40. *Решити одређени интеграл* $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x dx.$

Решење. Прво ће бити решен неодређени интеграл методом парцијалне интегације. При томе мора бити $|x| < 1$.

$$\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Нека је $F(x) = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. Према Њутн-Лајбницовој формули важи:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x dx = (x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2})|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) - 1.$$

△

4.7 Метод смене у одређеном интегралу

Теорема 18. *Нека је функција* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *непрекидна, а функција* $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ *има непрекидан извод и при томе је* $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$. *Тада важи једнакост*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказ. Нека је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x), x \in [a,b]$. За сложену функцију $(F \circ \varphi)(t) = F(\varphi(t)), t \in [\alpha, \beta]$ важи

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'_{\varphi}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Дакле, за $\alpha \leq t \leq \beta$ функција $F(\varphi(t))$ је примитивна функција функције $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, па важи да је

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Са друге стране, како је $F'(x) = f(x)$ следи

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Пример 41. *Методом смене решити одређени интеграл* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx.$

Решење. У нареденом примеру уводи се смена $t = \varphi(x) = \sin x$. Како $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, наведена функција пресликава одсечак $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ на одсечак $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Функција $t = \varphi(x) = \sin x$ је непрекидно диференцијабилна и важи да је $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$ Такође, функција $\frac{1}{t^2}$ је непрекидна па су испуњени услови за теорему о смени промењљиве у одређеном интегралу. Дакле:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \sqrt{2} - 1.$$

Битно је уочити да се приликом налажења одређеног интеграла у решењу не враћа на стару промењљиву x и да се приликом замене промењљиве мењају границе интеграције. △

Пример 42. *Методом смене решити одређени интеграл* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

Решење. У овом примеру прво ће бити уведена смена $x = tgt$. Како $x \in [0,1]$, наведена функција која је уведена као смена пресликава одсечак $[0,1]$ на одсечак $[0, \frac{\pi}{4}]$. Као и у претходном примеру, испуњени су услови за примену теореме о смени промењљиве у одређеном интегралу. Увођењем наведене смене у интеграл добија се:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgt)dt.$$

Како за добијени интеграл није могуће уочити решење, уводи се смена која ће трансформисати границе интеграције и саму подинтегралну функцију. Уводи се смена $p = \frac{\pi}{4} - t$. Добија се:

$$I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln(1 + tg(\frac{\pi}{4} - p))dp = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - tgp}{1 + tgp}\right)dp =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + tgp}\right)dp = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dp - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + tgp)dp.$$

Како је $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + tgp)dp$ заправо интеграл који се појавио на почетку задатка, подинтегрална функција и границе интеграла су исте као код интеграла са почетка након увођења прве смене. Дакле:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dp - I.$$

Добија се да је $I = \frac{\pi}{8} \cdot \ln 2$. △

Пример 43. *Методом смене решити интеграл* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx.$

Решење. Уводи се смена $x = \frac{\pi}{2} - t$. Добија се:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\frac{\pi}{2} - t) \cdot \cos t \sin t}{\cos^4 t + \sin^4 t}dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{\cos^4 t + \sin^4 t}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \cdot \sin t \cos t}{\cos^4 t + \sin^4 t}dt.$$

Потребно је уочити да $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \cdot \sin t \cos t}{\cos^4 t + \sin^4 t}dt$ има исту подинтегралну функцију и исте границе као интеграл са почетка задатка, па се он може означити са I. Одавде је:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{\cos^4 t + \sin^4 t}dt - I,$$

односно,

$$2I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{\cos^4 t + \sin^4 t}dt.$$

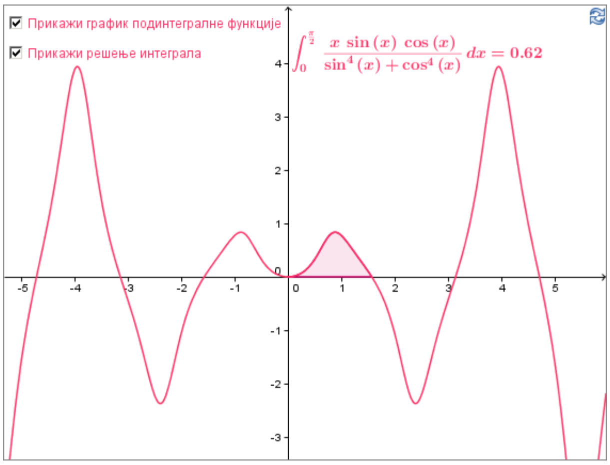
Сада преостаје да се реши интеграл $\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{\cos^4 t + \sin^4 t}dt$. Уводи се смена $p = \sin t$ и добија се да је:

$$I = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{pdp}{2p^4 - 2p^2 + 1}.$$

Овде је потребно увести нову смену $p^2 = s$, а потом интеграл трансформисати на таблични. Добија се:

$$I = \frac{\pi}{8}\int_0^1 \frac{ds}{2s^2-2s+1} = \frac{\pi}{16}\int_0^1 \frac{ds}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{8}arctg(2s-1)\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{16}.$$

$\triangle$



Слика 48: *Графички приказ решења интеграла из примера 43. као површине испод графика функције на датом интервалу*

Пример 44. *Решити интеграл* $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{|\ln x|}{1+x}dx.$

Решење. Како се у оквиру подинтегралне функције налази апсолутна вредност, неопходно је размотрити када је та апсолутна вредност позитивна, а када је негативна. Због особине адитивности интеграла, могуће је дати интеграл написати у облику збира, па важи:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{|\ln x|}{1+x}dx = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{-\ln x}{1+x}dx + \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{1+x}dx.$$

Такође, у границама интеграла налази се број a, општи број од кога такође зависи знак интеграла. Биће размотрена два случаја - случај када је број $a > 1$ и када је $0 < a < 1$.

1. $a > 1$

   Уводи се смена $x = \frac{1}{t}$ за интеграл $-\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{\ln x}{1+x}dx$. Добија се сада да је почетни интеграл једнак:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{|\ln x|}{1+x}dx = -\int_{a}^{1} \frac{-\ln t^{-1}}{1+\frac{1}{t}}\cdot\frac{dt}{t^2} + \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{1+x}dx =$$

$$= \int_{1}^{a} \frac{\ln t}{t(t+1)}dt + \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{1+x}dx = \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{x(x+1)}dx + \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{1+x}dx =$$

$$= \int_{1}^{a} \frac{\ln t}{1+t}\left(1+\frac{1}{t}\right)dt = \int_{1}^{a} \frac{\ln t}{t}dt = \frac{\ln^2 a}{2}.$$

2. $a < 1$

   Како је број $a \in (0, 1)$, границе интеграла морају заменити места, а потом ће добијени интеграл бити записан као збир два интеграла.

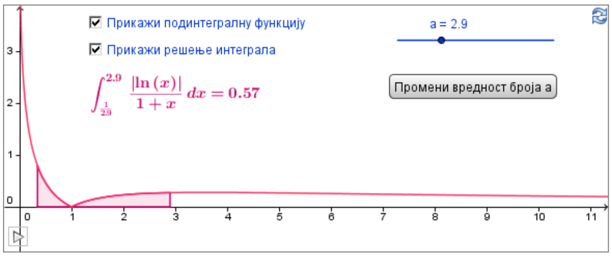
$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{|\ln x|}{1+x} dx = -\int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{|\ln x|}{1+x} dx = \int_{a}^{1} \frac{\ln x}{1+x} dx - \int_{1}^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{1+x} dx.$$

   Уводи се смена $t = \dfrac{1}{x}$ за интеграл $\displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{1+x} dx$:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{|\ln x|}{1+x} dx = \int_{a}^{1} \frac{\ln x}{1+x} dx + \int_{a}^{1} \frac{\ln t}{t(t+1)} dt =$$

$$= \int_{a}^{1} \frac{\ln x}{1+x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int_{a}^{1} \frac{\ln x}{x} dx = -\frac{\ln^2 a}{2}.$$

△



Слика 49: *Аплет на којем је приказано решење интеграла из примера 44. у зависности од промене вредности броја a*

Пример 45. *Решити интеграл* $I = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{x}{2 + \sin x} dx.$

Решење. Биће уведена смена тако да границе интеграла буду симетричне. Сменом $t = x - \dfrac{\pi}{2}$ границе постају симетричне и почетни интеграл је могуће записати као збир два интеграла.

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{x}{2 + \sin x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{2 + \cos t} dt + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos t}.$$

Интервал у коме се врши интеграција је симетричан у односу на координатни почетак. Подинтегрална функција интеграла $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{2 + \cos t} dt$ је непарна на симетричном интервалу, па је овај интеграл, према примеру 35. једнак нули. Како је подинтегрална функција интеграла $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos t}$ парна, према примеру 35. важи да је $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos t} = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos t}$. Дакле, важи:

$$I = \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos t}.$$

Уводи се смена $p = tg\frac{t}{2}$. Добија се да је почетни интеграл сада једнак

$$I = \pi\int_0^1 \frac{2dp}{3+p^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}arctg\frac{p}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}.$$

△

4.8 Метод парцијалне интеграције у одређеном интегралу

Теорема 19. *Нека функције $u(x)$ и $v(x)$ имају непрекидне изводе на сегменту $[a, b]$. Тада важи једнакост:*

$$\int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Доказ. Функције u и v имају непрекидне изводе, а неопходно је да и за њихов производ то важи. За производ функција $u(x)v(x)$ важи једнакост

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Из наведене једнакости се види да је и производ ове две функције непрекидан. Према Њутн-Лајбницовој формули је

$$\int_a^b [u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)]dx = [u(x) \cdot v(x)]|_a^b$$

тј.

$$\int_a^b u(x)dv(x) + \int_a^b v(x)du(x) = [u(x) \cdot v(x)]|_a^b,$$

што је требало доказати. □

Наведена формула се скраћено пише у облику

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример 46. *Методом парцијалне интеграције решити одређени интеграл* $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (x+1)\cos(3x)dx.$

Решење. Нека је $u(x) = x+1$, $dv(x) = \cos(3x)dx$. Приликом решавања одређеног интеграла методом парцијалне интеграције границе интеграла остају исте.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (x+1)\cos(3x)dx = \frac{1}{3}(x+1)\cdot\sin 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3xdx =$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{\pi}{3}+1)\sin\pi - \frac{1}{3}(\frac{\pi}{6}+1)\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{9}\cos 3x|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi+8}{18}.$$

△

5 Примена одређеног интеграла

Рад са одређеним интегралима и генерално, читав калкулусни рачун има бројне примене. Те примене се могу уочити и у животу, као и у многим природним, па и друштвеним наукама. Геометријска примена у математици је најчешће помињана, јер се помоћу одређеног интеграла може израчунати површина равног лика, дужина лука криве, као и површина и запремина обртних тела. Многи практични проблеми могу се уопштити и свести на одговарајући геометријски модел, чиме је омогућена примена одређеног интеграла. Овде ће бити приказане примене одређеног интеграла у геометрији.

5.1 Површина фигура у равни

Нека је D равна геометријска фигура ограничена затвореном простом кривом L. Уписани многоугао у фигуру D је многоугао чије се све тачке налазе у D, док је описани многоугао око фигуре D многоугао који садржи све тачке фигуре D. Нека је $\{W_u\}$ скуп површина уписаних, а $\{W_o\}$ скуп површина описаних многоуглова фигуре D. Скуп $\{W_u\}$ је ограничен одозго, а скуп $\{W_o\}$ ограничен одоздо, па постоје $\sup\{W_u\} = \underline{P}$ и $\inf\{W_o\} = \overline{P}$.

Дефиниција 7. *Каже се да је фигура D мерљива ако је $\underline{P} = \overline{P}$. При томе се заједничка вредност $\underline{P}$ и $\overline{P}$ назива површином фигуре D и означава са $P(D)$.*

Став 12. *Равна фигура D је мерљива ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоје описани и уписани многоугао фигуре D, тако да је разлика $W_o - W_u$ њихових површина мања од ε.*

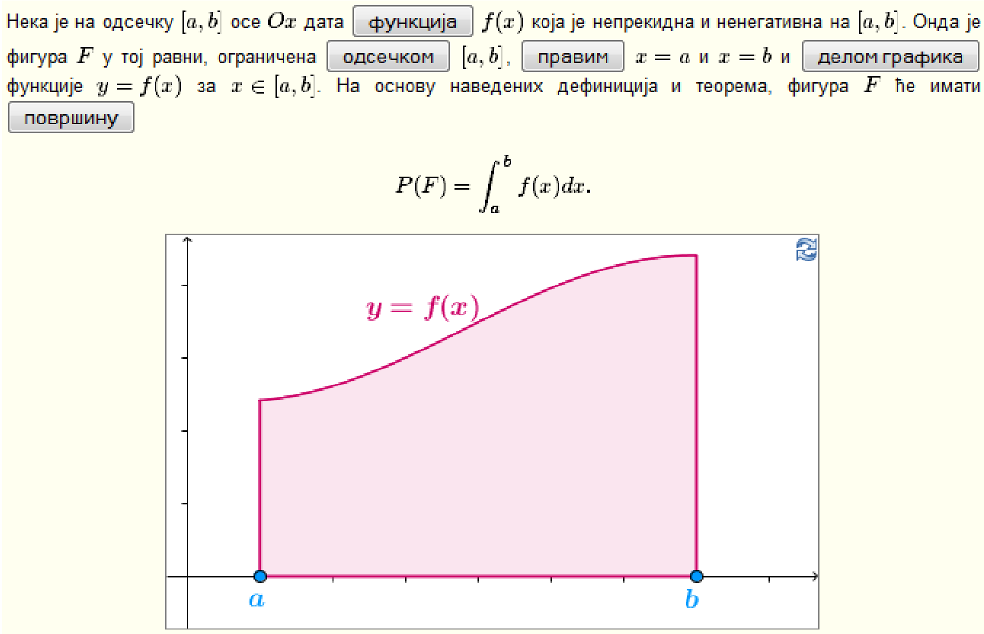
Доказ овог тврђења може се видети у [1].

Нека је у равни задат координатни систем xOy. Приликом рачунања површине фигура у равни биће коришћен дефинисани појам мерљиве фигуре, дефиниција 3, дефиниција 5. и теорема 8.

1. Нека је на одсечку $[a, b]$ осе Ox дата функција $f(x)$ која је непрекидна и ненегативна на $[a, b]$. Онда је фигура F у тој равни, ограничена одсечком $[a, b]$, правим $x = a$ и $x = b$ и делом графика функције $y = f(x)$ за $x \in [a, b]$. На основу наведених дефиниција и теорема, фигура F ће имати површину:

$$P(F) = \int_a^b f(x)dx.$$

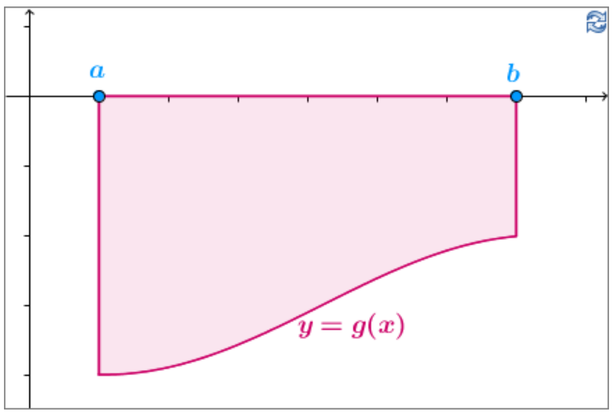
   На слици 50. приказан је део веб странице на којој су, као и раније, приказани аплет и дугмићи повезани са аплетом направљеним у ГеоГебри. Притиском на одговарајуће дугмиће долази до исцратавања фигуре чија се површина тражи. На сличан начин, на истој страници су представљени и други аплети који илуструју преостале случајеве.



Слика 50: *Аплет на којем се исцртава фигура која је описана у првом случају и боји тражену површину*

2. Нека је функција $g(x)$ на одсечку $[a,b]$ непрекидна и непозитивна. Тада ће криволинијски трапез F одређен на сличан начин као у претходном случају имати површину

$$P(F) = -\int_a^b g(x)dx.$$



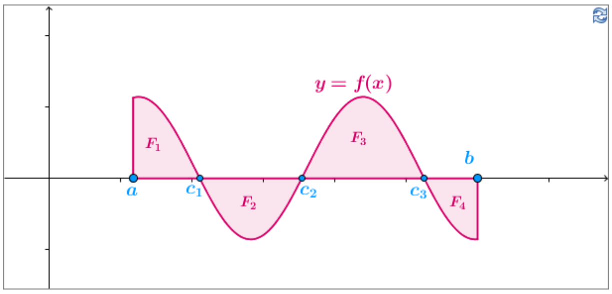
Слика 51: *Аплет на којем је исцртана фигура описана у другом случају са обојеном траженом површином*

3. Ако је функција $f(x)$ на одсечку $[a,b]$ непрекидна и мења знак у тачкама $c_1, c_2, \ldots, c_k$, онда фигура F, ограничена одсечком $[a,b]$, правим $x = a$ и $x = b$ и делом графика функције $f(x), x \in [a,b]$, има површину $P(F)$ која се рачуна као збир криволинијских трапеза на које је ту фигуру могуће разложити и који се уклапају у један од прва два случаја. У примеру са

слике било би

$$P(F) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) + P(F_4) =$$

$$= \int_a^{c_1} f(x)dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx - \int_{c_3}^{b} f(x)dx.$$



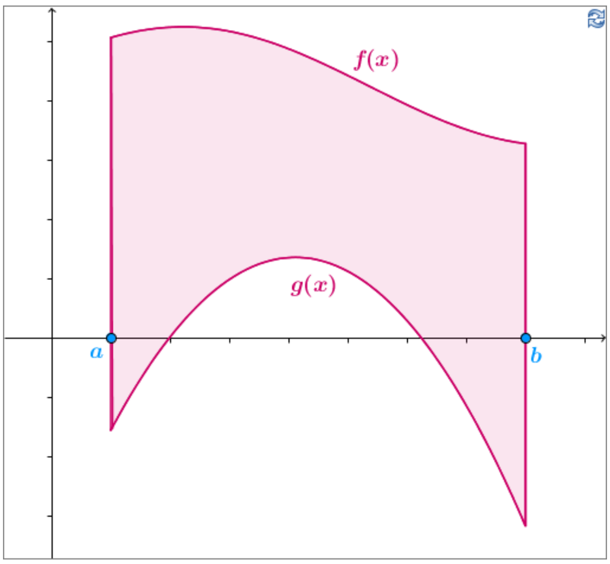
Слика 52: *Аплет на којем је исцртана функција описана у трећем случају са обојеном траженом површином и означеним фигурама*

4.) Нека су на одсечку $[a, b]$ осе Ox дате функције $f(x)$ и $g(x)$ које су непрекидне на $[a, b]$ и за свако $x \in [a, b]$ је $g(x) < f(x)$. Нека је фигура F у тој равни дата са

$$F = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\},$$

као на слици 53. На основу претходног може се закључити да фигура F има површину $P(F)$ која се рачуна по формули

$$P(F) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

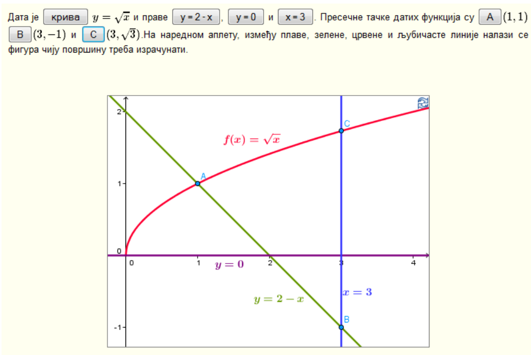


Слика 53: *Аплет на којем је приказана фигура ограничена графицима двеју функција на одређеном интервалу са обојеном траженом површином*

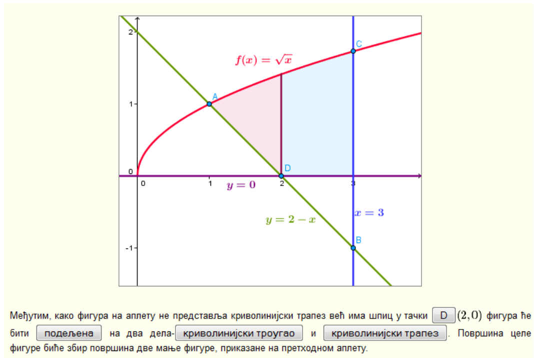
Пример 47. *Израчунати површину дела равни који ограничавају криве $y = \sqrt{x}, x + y = 2, y = 0$ и $x = 3$.*

Решење. Дата је крива $y = \sqrt{x}$ и праве $y = 2 - x, y = 0$ и $x = 3$. Прво ће бити нацртана слика и нађене пресечне тачке. На слици 54. се између плаве, зелене, црвене и љубичасте линије налази фигура чију површину треба израчунати. Међутим, како фигура на слици не представља криволинијски трапез, већ има шпиц у тачки $(2, 0)$ фигура ће бити подељена на два дела - криволинијски троугао и криволинијски трапез. Површина целе фигуре биће збир површина две мање фигуре, приказане на слици 55.

На слици 54. приказан је аплет на којем се притиском на одговарајуће дугмиће исцртавају функције дате у задатку, као и одговарајуће пресечне тачке. На слици 55. приказан је аплет на којем је објашњено како се рачуна површина дате фигуре, а притиском на дугмиће се исцртавају криволинијски троугао и криволинијски трапез на који је дата фигура подељена.



Слика 54: *Фигура коју граде функције*



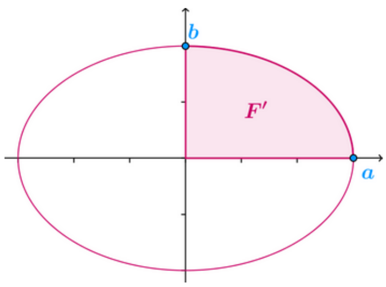
Слика 55: *Површина фигуре*

Дакле,

$$P = P_1 + P_2 = \int_1^2 (\sqrt{x} - 2 + x)dx + \int_2^3 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_1^2 - 2x|_1^2 + \frac{1}{2}x|_1^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_2^3 = 2\sqrt{3} - \frac{7}{6}.$$

△

Пример 48. *Израчунати површину фигуре у равни ограничене елипсом са полуосама a и b. Размотрити и специјалан случај када је $a = b = r$.*



Слика 56: *Елипса*

Решење. Нека је у равни елипсе дат координатни систем xOy тако да једначина елипсе буде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Половина елипсе изнад осе Ox има једначину

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Како је наведена функција парна, важиће следеће:

$$P(F) = 4P(F') = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Користећи се сменом $x = a\sin t, dx = a\cos t dt, t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}$ добија се

$$P(F) = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt = 4ab\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.$$

Ако је специјално, $a = b = r$, одавде се добија позната формула за површину круга K_r полупречника r

$$P(K_r) = r^2\pi.$$

$\triangle$

Пример 49. *Наћи површину равног лика ограниченог графиком функције* $f(x) = x^2 + x + 1$, *правом* $x = -1$ *и тангентом те криве у тачки* $A(1, y)$.

Решење. Прво треба наћи y координату тачке A. Она мора да задовољи једначину криве, па ће бити

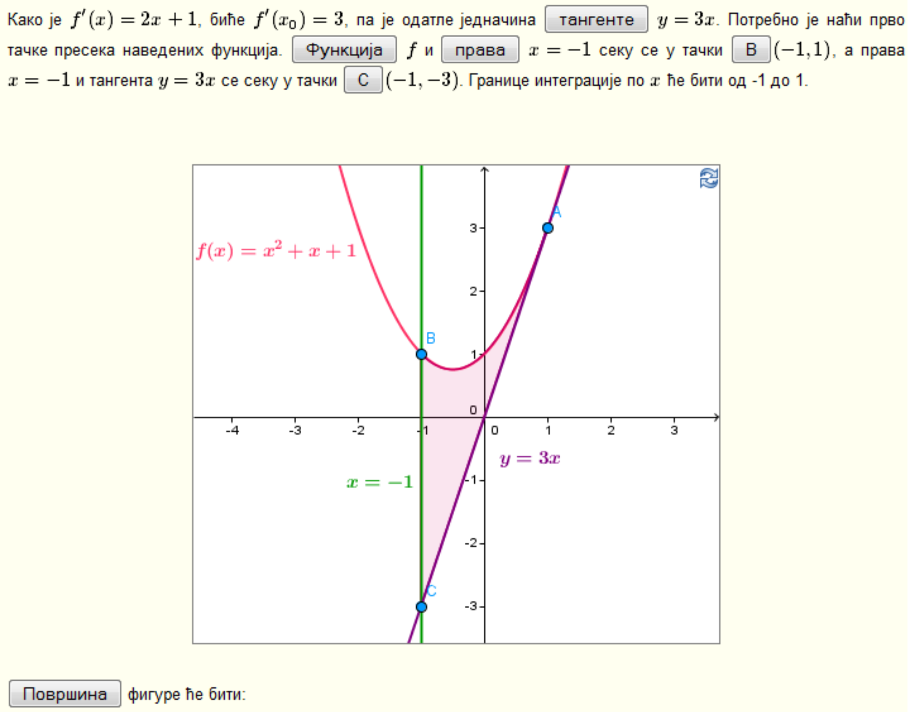
$$y = 1^2 + 1 + 1 = 3.$$

Дакле, координате тачке су $A(1, 3)$. Једначина тангенте у тачки на датој криви биће:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Како је $f'(x) = 2x + 1$, биће $f'(x_0) = f'(1) = 3$, па је одатле једначина тангенте $y = 3x$. На слици 57. приказани су график функције, тангенте и праве $x = -1$, као и део равни чија се површина тражи. Потребно је наћи прво тачке пресека наведених функција. Функција f и права $x = -1$ секу се у тачки $(-1, 1)$, а права $x = -1$ и тангента $y = 3x$ се секу у тачки $(-1, -3)$. Границе интеграције по x ће бити од -1 до 1.

На слици 57. приказан је аплет на којем се притиском на одговарајуће дугмиће исцртавају функције које ограничавају фигуру чија се површина тражи. На овај начин је омогућена интерактивност приликом решавања примера.



Слика 57: *Аплет на којем је приказана фигура чија се површина тражи, као и дугмићи који учествују у исцртавању функција и фигуре*

Површина фигуре ће бити

$$P = \int_{-1}^{1} (x^2 + x + 1)dx - \int_{-1}^{1} 3x dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + x|_{-1}^{1} - \frac{3x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - x^2|_{-1}^{1} + x|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{8}{3}.$$

△

Пример 50. *Наћи површину равног лика ограниченог са* $y_1 = 2 - |x - 2|$ *и* $y_2 = \frac{3}{|x|}$.

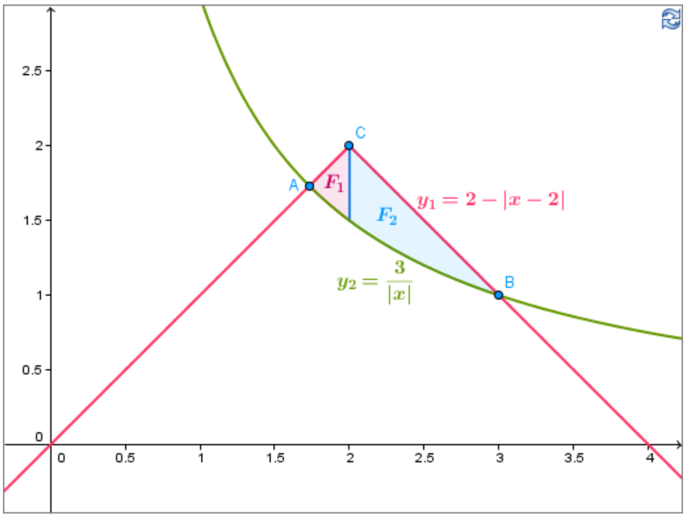
Решење. Потребно је прво разложити апсолутну вредност по дефиницији.

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ 2 - x, & x < 2. \end{cases}$$

Тада је

$$y_1 = \begin{cases} 4 - x, & x \geq 2 \\ x, & x < 2. \end{cases}$$

На слици 58. приказани су графици обе функције, као и тражена површина. Пресечне тачке графика ове две функције су $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и $B(3, 1)$. Како функција $y_1 = 2 - |x - 2|$ има шпиц у тачки $C(2, 2)$, површина ће се добити као збир површина фигура F_1 и F_2 приказаних на слици.



Слика 58: *Аплет на којем је приказана фигура чија се површина тражи*

Дакле, важи следеће:

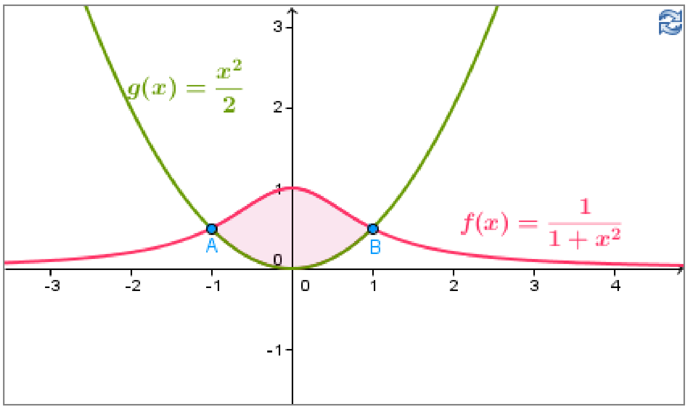
$$P = P(F_1) + P(F_2) = \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(x - \frac{3}{x}\right) dx + \int_{2}^{3} \left(4 - x - \frac{3}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\bigg|_{\sqrt{3}}^{2} - 3\ln x|_{\sqrt{3}}^{2} + 4x|_2^3 - \frac{x^2}{2}\bigg|_2^3 - 3\ln x|_2^3 = 2 - \frac{3}{2}\ln 3.$$

$\triangle$

Пример 51. *Израчунати површину фигуре ограничене кривама* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ *и* $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Решење. За почетак ће бити нацртани графици наведених функција. Оне се секу у двема тачкама $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ и $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, па ће границе интеграције по x ићи од -1 до 1.



Слика 59: *Аплет на којем је приказана фигура чија се површина тражи*

Површина фигуре ће бити

$$P = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Због парности функције, важи да је

$$P = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2arctgx|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

△

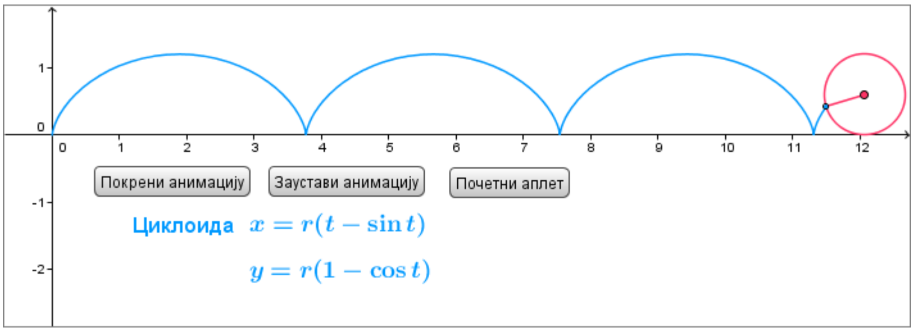
У претходним примерима, површина је била рачуната у правоуглим координатама. Међутим, крива која ограничава фигуру чија површина се тражи може бити задата и у другом облику. Сада ће бити размотрено израчунавање површине задате у параметарском облику или помоћу поларних координата.

Површина равне фигуре задате у параметарском облику

Ако су функције x и y интеграбилне на $[a, b]$ и ако су параметарски задате једначине криве $x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, онда је површина фигуре која се налази између задате криве, осе Ox и правих $x = x(a)$ и $x = x(b)$ једнака:

$$P = \int_a^b y(t)x'(t)dt.$$

Пример 52. *Наћи површину између осе Ox и првог свода циклоиде $(0, 2\pi)$ која је дата једначинама $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$.*



Слика 60: *Аплет на којем је приказано креирање циклоиде*

Решење. Циклоида је дата у параметарском облику па ће њена површина бити

$$P = \int_0^{2r\pi} y(t)x'(t)dt = 2\int_0^{r\pi} y(t)x'(t)dt,$$

због симетричности фигуре чију површину се тражи. Такође, важи да је $x(t) = r(t - \sin t)$, $x'(t) = r(1 - \cos t)$, $y = r(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Тада је

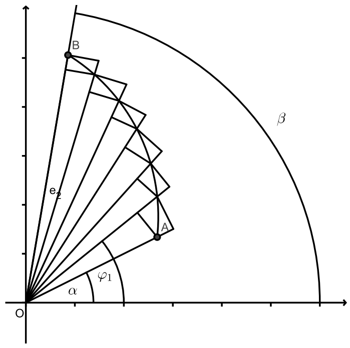
$$P = 2\int_0^{\pi} r^2(1 - \cos t)^2 dt = 2r^2 \int_0^{\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= 2r^2 \left.\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{2}\sin t \cos t\right)\right|_0^{\pi} = 3r^2\pi.$$

△

Површина у поларним координатама

Нека је дата крива $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$ у поларном координатном систему, где је $r(\varphi)$ непрекидна функција. Геометријска фигура OAB ограничена деловима полуправих $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ и кривом $r = r(\varphi)$ назива се криволинијским троуглом. Биће нађена површина тог троугла.

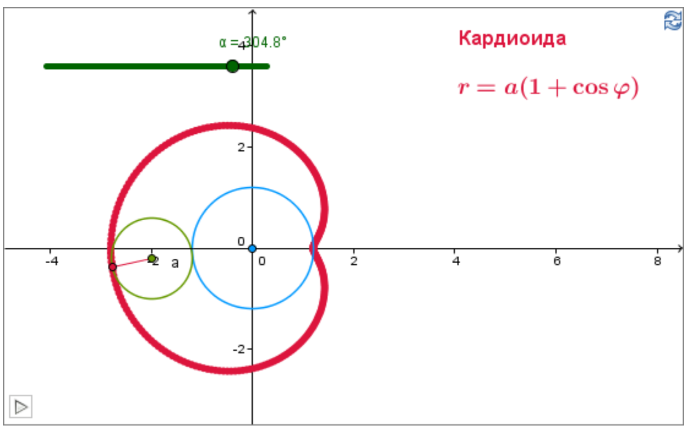


Слика 61: *Подела угла*

Нека је P подела сегмента $[\alpha, \beta], P = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Нека је $m_i = \inf_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi)$, $M_i = \sup_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi)$. Кружни исечци полупречника m_i, односно M_i, ограничени полуправим $\varphi = \varphi_{i-1}$ и $\varphi = \varphi_i$ имају површину $P = \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$, односно површину $P = \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$, где је $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$. Унија ових исечака представља уписану фигуру F_u, односно описану фигуру F_o. Површине ових фигура су, респективно, $\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i, \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$, што представља доњу, односно горњу Дарбуову суму функције $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$ на сегменту $\alpha \le \varphi \le \beta$. Због непрекидности функције $r = r(\varphi)$, ове две суме ће бити једнаке и дата фигура ће бити мерљива,па ће површина криволинијског троугла бити

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Пример 53. *Наћи површину кардиоиде* $r = a(1 + \cos\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi, a > 0.$



Слика 62: *Аплет на којем је представљено креирање кардиоиде*

Решење. Овде ће бити примењена формула за површину криве која је дата у поларним координатама. Важно је приметити и да је кардиоида симетрична фигура:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

$\triangle$

Пример 54. *Наћи површину лемнискате* $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Решење. Дата крива је затворена и симетрична у односу на праве $r\cos\varphi = 0$ и $r\sin\varphi = 0$, па се може израчунати део лемнискате који се налази у првом квадранту, што представља четвртину површине целе фигуре. Како је у првом квадранту $0 \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2}$, биће $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ и то ће бити границе интеграла. Дакле, важи:

$$\frac{P}{4} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Одавде је

$$P = a^2.$$

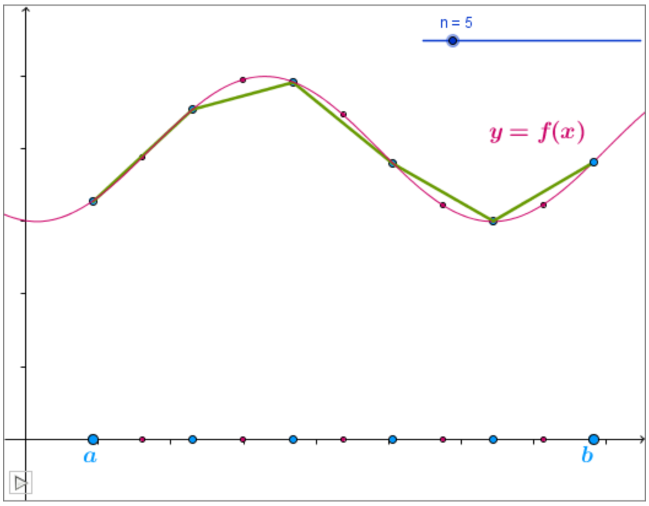
$\triangle$

5.2 Дужина лука криве

Одређени интеграл такође се може применити приликом израчунавања дужине лука криве. Нека је крива L у равни xOy представљена графиком функције $f(x), x \in [a,b]$, при чему је $f(x)$ непрекидно диференцијабилна на $[a,b]$. Нека је дата подела $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ одсечка $[a,b]$ и нека је конструисана полигонална линија P_L са теменима $A_0(x_0, f(x_0)), A_1(x_1, f(x_1))$, $\ldots, A_n(x_n, f(x_n))$. Полигонална линија је уписана у криву L и њена дужина је једнака

$$s(P_L) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 - (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

На слици 63. приказан је део аплета на којем се, помоћу дугмића који се налазе у пратећем тексту исцртавају подеоне тачке, као и полигонална линија. Притиском на дугме се повећава број подеоних тачака, па се полигонална линија све мање разликује од графика функције. На слици је приказан већ формиран аплет, без дугмића.



Слика 63: *Подеоне тачке и полигонална линија*

Како је функција f диференцијабилна на $[a,b]$, према Лагранжовој теореми постоји тачка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ таква да је

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Одатле следи да је

$$s(P_L) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\xi_i))^2 \cdot (x_i - x_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ово је интегрална сума за функцију $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ на одсечку $[a,b]$ при подели P и избору ξ тачака $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Када број подеоних тачака неограничено расте, дужина d најдужег интервала тежи нули. Лук криве L имаће дужину $s(L)$ ако постоји лимес ове интегралне суме када $d(P) \longrightarrow 0$. Како је $f(x)$ непрекидна функција на $[a,b]$, функција $\sqrt{1+f'^2(x)}$ ће бити такође непрекидна на $[a,b]$ и постоји

$$\lim_{d(P)\longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(x))^2}(x_i - x_{i-1})$$

и он је једнак $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$. Дакле, крива L има дужину лука

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Пример 55. *Израчунати обим круга полупречника $r, r > 0$.*

Решење. Обим круга биће једнак дужини два полукруга. Једначина полукруга који припада горњој полуравни гласи $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, одакле следи да је $f'(x) = y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Одавде је

$$O = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx = 2r\int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2r \arcsin \frac{x}{r}\Big|_{-r}^{r} = 4r \arcsin 1 = 2r\pi.$$

$\triangle$

Пример 56. *Наћи дужину лука криве дате функцијом* $f(x) = \ln(2\cos x)$ *на интервалу* $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Решење. Дужина лука криве рачуна се по изведеној формули:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Како је $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -tgx$, биће:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + tg^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}.$$

Овде ће бити уведена тригонометријска смена, $t = tg\dfrac{x}{2}$, одакле је $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, а $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Границе интеграла се такође мењају, па доња граница постаје $t_1 = 0$, а горња $t_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Одавде је

$$l = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln|2 + \sqrt{3}|.$$

△

Дужина лука криве дате у параметарском облику

Нека је крива дата једначинама $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$, где су x и y непрекидно диференцијабилне на сегменту $[\alpha, \beta]$. Нека се елиминацијом параметра t из датих једнакости добија једначина криве у облику $y = f(x), x \in [a, b]$. Тада се дужина l криве линије L од тачке $(a, f(a))$ до тачке $(b, f(b))$ израчунава по формули

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

односно,

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

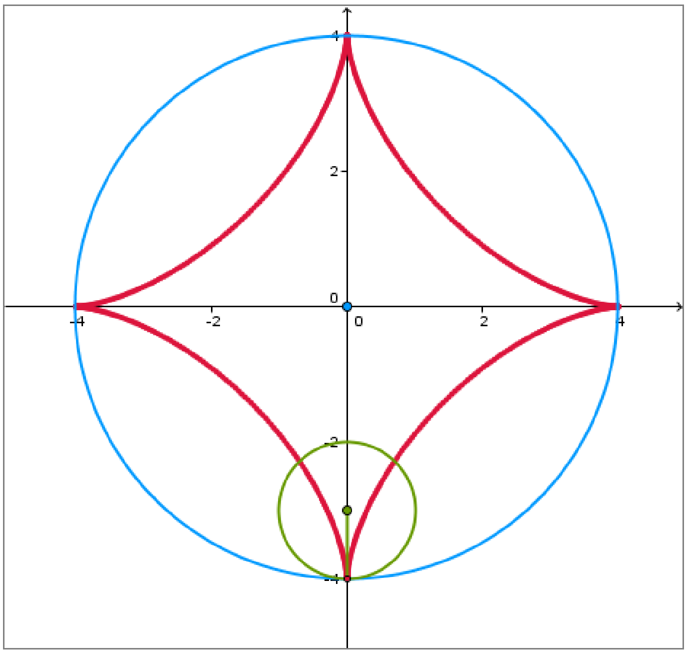
Пример 57. *Наћи дужину лука астероиде дате једначином* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Решење. Преласком на параметарски облик једначине астероиде добија се да је $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$. Како је астероида симетрична у односу на координатне осе, добија се

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + ((y'(t))^2} dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt =$$

$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 6a \sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

△



Слика 64: *Аплет на којем је приказано креирање астероиде*

Пример 58. *Наћи дужину лука првог свода циклоиде* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решење. Овде ће бити примењена формула за рачунање дужине лука криве у параметарском облику:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Важи да је $x'(t) = a(1 - \cos t)$ и $y'(t) = a \sin t$. Како је $x'^2(t) + y'^2(t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \dfrac{t}{2}$, одавде је

$$l = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \begin{bmatrix} \frac{t}{2} = z \\ dt = 2dz \\ t_1 = 0 \longrightarrow z_1 = 0 \\ t_2 = 2\pi \longrightarrow z_2 = \pi \end{bmatrix} =$$

$$= 4a \int_0^{\pi} \sin z dz = -4a \cos z|_0^{\pi} = -4a \cdot (-1) + 4a = 8a.$$

$\triangle$

Дужине лука криве дате у поларним координатама

Нека је крива дата поларном једначином $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, где је функција $r(\varphi)$ непрекидно диференцијабилна. Крива ће бити представљена у параметарском облику

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, y = r(\varphi) \sin \varphi, \alpha \leq \varphi \leq \beta.$$

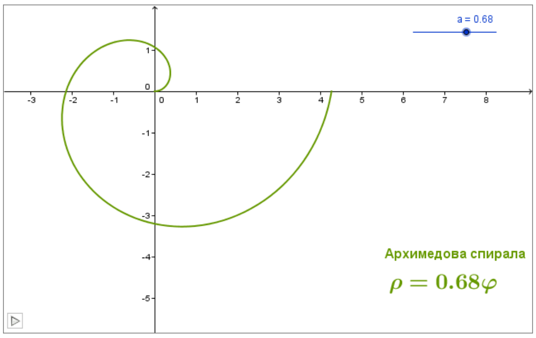
У том случају израз за дужину постаје

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)^2+(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)^2}d\varphi,$$

односно,

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r'(\varphi))^2+r^2(\varphi)}d\varphi.$$

Пример 59. *Наћи дужину лука који гради Архимедова спирала $\rho=a\varphi$ за $0\leq\varphi\leq 2\pi$.*



Слика 65: *Приказ Архимедове спирале у зависности од параметра a*

Решење.

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi.$$

$\triangle$

Интеграл $\int\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi$ је раније решен и једнак је

$$\int\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi=\frac{1}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\ln(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1})\right).$$

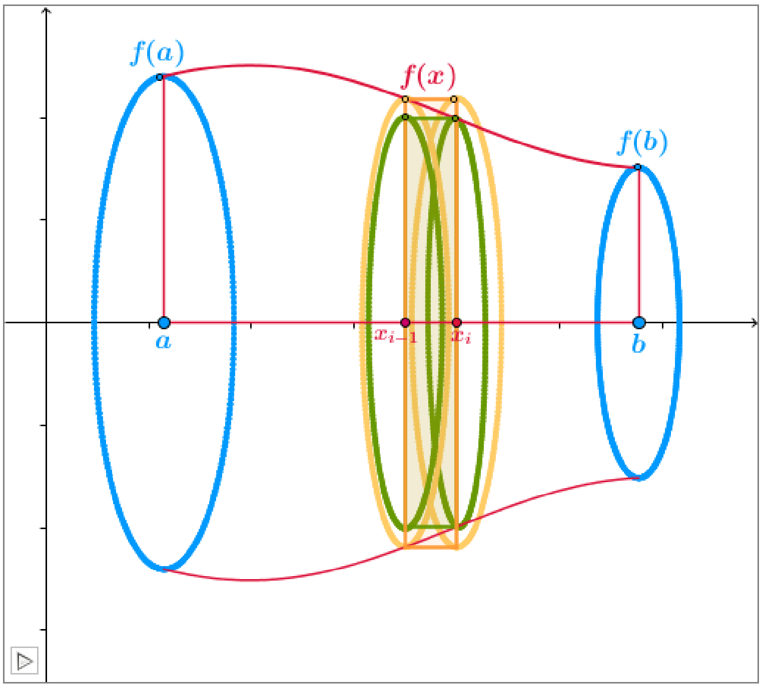
Дужина тражене криве је онда

$$l=\frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\ln(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1})\right)|_0^{2\pi}=\frac{a}{2}(2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})).$$

5.3 Запремина обртног тела

Нека је функција $f(x)$ непрекидна и позитивна функција дефинисана на сегменту $[a,b]$. Ако се криволинијски трапез чије су странице сегмент $[a,b]$, делови правих $x=a, x=b$ и крива $y=f(x), a\leq x\leq b$ обрће око осе Ox добија се обртно тело. Површ која ограничава ово тело састоји се од две базе које чине кругови полупречника $f(a)$ и $f(b)$ и омотача. Нека је $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ подела сегмента $[a,b]$ и $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$, $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$. У равни xOy могу се уочити правоугаоници са основом $[x_{i-1},x_i]$ и висинама m_i, односно $M_i, i=1,2,\ldots,n$. Ротацијом тих правоугаоника око осе Ox добијају се ваљци.

На слици 66. приказан је графички део аплета на којем се, притиском на одговарајуће дугмиће на веб страници, формира описано обртно тело, као и поменути ваљци.



Слика 66: *Обртно тело настало ротацијом дела графика функције око осе* Ox

Унија ваљака чији су полупречници основа m_i има запремину $v(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \pi \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а унија ваљака са полупречницима основа M_i имају запремину $V(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \pi \Delta x_i$. Запремине $v(P)$, односно $V(P)$, представљају доњу, односно горњу, Дарбуову суму функције $\pi f^2(x), a \leq x \leq b$. Запремина датог обртног тела ће бити дефинисана као лимес ових Дарбуових сума када параметар поделе тежи нули:

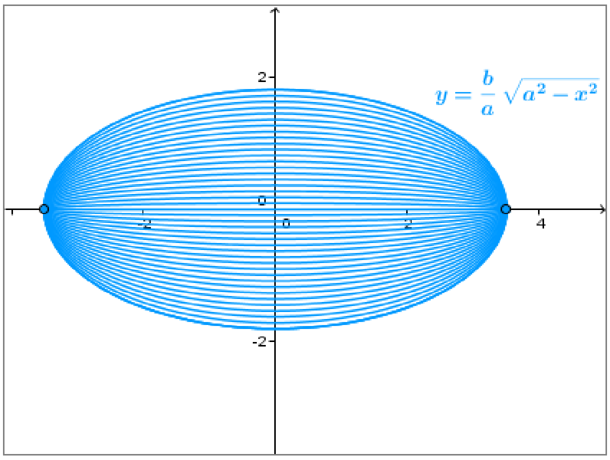
$$V = \lim_{\lambda(P) \longrightarrow 0} v(P) = \lim_{\lambda(P) \longrightarrow 0} V(P).$$

Дакле, запремина обртног тела износи

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Пример 60. *Израчунати запремину сфероида који је настао ротацијом елипсе са полуосама* a *и* b *око* Ox *осе.*

Решење. Као и раније, из формуле $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ следи да је $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Нека горња полуоса елипсе ротира око осе Ox, тада се добија елипсоид чију запремину желимо да израчунамо.



Слика 67: *Сфероид настао ротацијом горње полуосе елипсе*

Овде ће бити примењена формула за запремину фигуре у простору.

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx.$$

Како је функција y парна, добија се следећа једнакост:

$$V = 2\pi \int_{0}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x\Big|_0^a - \frac{x^3}{3}\Big|_0^a\right) = \frac{2\pi b^2}{a^2}\frac{2a^3}{3} = \frac{4}{3}ab^2\pi.$$

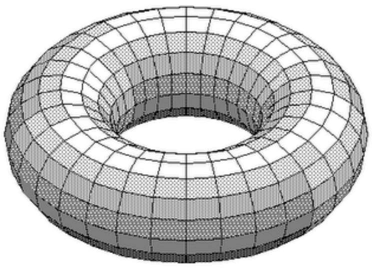
Специјално, за $a = b = r$ добија се једначина круга $x^2 + y^2 = r^2$. Запремина која се у том случају добија је

$$V = \frac{4}{3}rr^2\pi = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

$\triangle$

Пример 61. *Одредити запремину торуса који се добија ротацијом круга* $x^2 + (y-a)^2 = r^2$, *при чему је* $a > r$, *око* Ox *осе.*

Решење. Запремина торуса добија се одузимањем запремина тела добијених обртањем одговарајућих лукова круга око Ox осе.



Слика 68: *Торус*

$$(y-a)^2 = r^2 - x^2,$$
$$y - a = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Одавде следи

$$y^2 = (a \pm \sqrt{r^2 - x^2})^2,$$

$$V = 2\pi \int_0^r (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx - 2\pi \int_0^r (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx,$$

$$= 2\pi \int_0^r 4a \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx,$$

$$V = 8\pi a \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 8\pi a \int_0^r \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Овај интеграл ће бити записан као разлика два интеграла:

$$V = 8\pi a \left(\int_0^r \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx - \int_0^r \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \right).$$

Први интеграл ће се свести на таблични, а други ће бити решен парцијалном интеграцијом. Тада се добија следећа једнакост:

$$V = 8\pi a \left[\frac{1}{2} \left(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin \frac{x}{r} \right) \right] \Bigg|_0^r,$$

$$V = 8\pi a \cdot \frac{r^2}{2} (\arcsin 1 - \arcsin 0),$$

$$V = 4\pi r^2 a \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Добија се да је запремина торуса

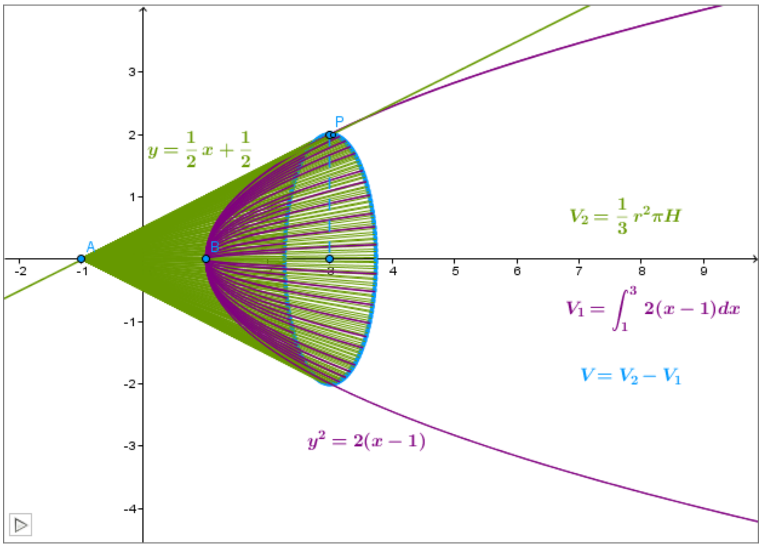
$$V = 2\pi^2 r^2 a.$$

△

Пример 62. *У тачки $P(3,2)$ параболе $y^2 = 2(x-1)$ конструисана је тангента на ту параболу. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре ограничене тангентом, параболом и осом Ox.*

Решење. Прво је потребно наћи једначину тангенте. Она се добија из формуле $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Како је $y = f(x) = \sqrt{2(x-1)}$, одатле важи да је $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(x-1)}}$ и $f'(3) = \dfrac{1}{2}$. Добија се да је једначина тангенте $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. Запремина обртног тела које настаје ротацијом дате фигуре се рачуна тако што се од запремине тела које настаје ротацијом тангенте одузме запремина тела које настаје ротацијом параболе.

На слици 69. приказан је графички део аплета на којем је приказано како настаје тело чију запремину треба израчунати. На аплету се исцртавају прво функције и пресечне тачке, а потом долази до ротације фигуре ограничене параболом и тангентом око осе Ox.



Слика 69: *Обртно тело настало ротацијом наведених функција*

Ротацијом тангенте настаје купа, полупречника основе $r = 2$ и висине $H = 4$. Применом формуле за запремину купе добија се да је $V_2 = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{16\pi}{3}$. Дакле,

$$V = V_2 - V_1 = \frac{16\pi}{3} - \pi\int_1^3 2(x-1)dx = \frac{16\pi}{3} - 2\pi\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 = \frac{4\pi}{3}.$$

△

Пример 63. *Наћи запремину тела које настаје ротацијом лика ограниченог кривом $y = tgx$ и правом $y = 0$ око осе Ox у интервалу $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.*

Решење. Запремина тела се рачуна по наведеној формули.

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$$

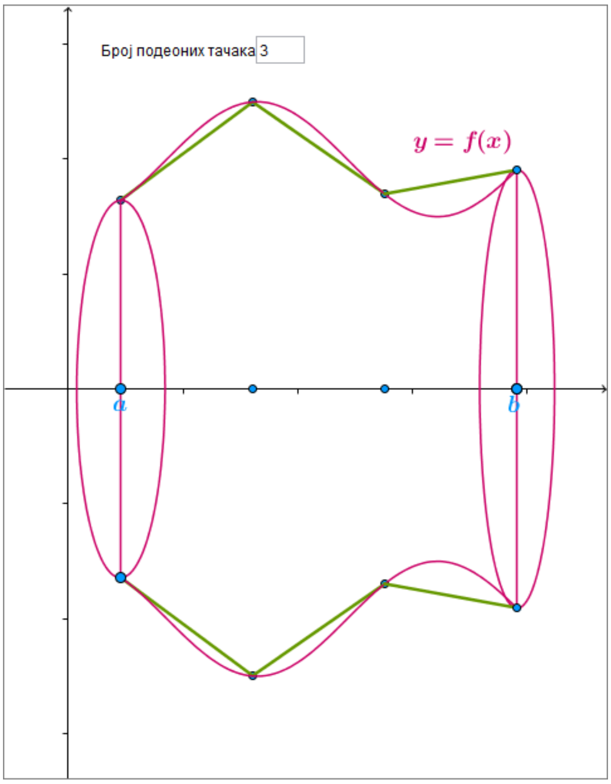
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = tgx - x|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

△

5.4 Површина обртног тела

Нека је криволинијски трапез F одређен функцијом $f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$. Ротацијом трапеза F око осе Ox настаје обртно тело приказано на слици 70. Поред запремине ротационог тела, могуће је израчунати и његову површину. Нека је функција $f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$ непрекидно диференцијабилна и нека је крива L, одређена функцијом f. Нека је дата подела $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ одсечка $[a, b]$ и нека је конструисана полигонална линија P_L са теменима $A_0(x_0, f(x_0)), A_1(x_1, f(x_1)), \ldots, A_n(x_n, f(x_n))$, унутар криве L. Приликом ротације криве L око осе Ox ротира и полигонална линија P_L. На тај начин, добијају се зарубљене купе, чији су полупречници основа $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$, за $i = 1, 2, \ldots, n$.

На слици 70. је приказан графички део аплета на којем је илустрована фигура која настаје ротацијом функције око осе Ox. Притиском на одговарајуће дугмиће који се налазе у склопу пратећег текста на веб страници долази до исцртавања одговарајућих графичких елемената на слици и напослетку, долази и до ротације криве око Ox осе. На аплету је омогућено кориснику да сам изабере број подеоних тачака, у односу на шта се формира и уписана полигонална линија. Што је број подеоних тачака већи, то се полигонална линија све више приближава графику дате функције.



Слика 70: *Аплет представља формирање обртног тела и зарубљених купа ротацијом графика функције и одговарајуће полигоналне линије*

Збир $S(P)$ површина омотача свих овако добијених купа биће

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i))]\sqrt{\Delta x_i^2 + (\Delta f(x_i))^2},$$

где је $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Према Лагранжовој теореми о средњој вредности важи:

$$\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i} = f'(\xi_i),$$

за неко $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \ldots, n$. Како је f непрекидна функција, постоји $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, тако да је

$$f(x_{i-1}) + f(x_i) = 2f(\eta_i), i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ако се наведене једнакости примене у формули за површину омотача добија се

$$S(P) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i.$$

Израз ће бити представљен у облику

$$S(P) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i + 2\pi \sum_{i=1}^{n} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i.$$

Ако је подела P довољно фина, тачке ξ_i и η_i које припадају сегменту $[x_{i-1}, x_i]$ се мало разликују, па ће се због непрекидности функције f и вредности $f(\xi_i)$ и $f(\eta_i)$ мало разликовати, па ће друга сума бити једнака нули. Одатле важи да је

$$S(P) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i.$$

Наведени израз представља интегралну суму, па је

$$S(P) = \lim_{\lambda(P) \longrightarrow 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Пример 64. *Израчунати површину сфере настале ротацијом половине круга $x^2 + y^2 = r^2$ око Ox осе, тако да је $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.*

Решење. Како је $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, одатле је $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Применом формуле за површину обртног тела и добија се:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx.$$

Како је функција y парна, добија се следеће

$$S = 4\pi r \int_0^r dx = 4\pi r^2.$$

$\triangle$

Пример 65. *Израчунати површину сфероида који настаје ротацијом половине елипсе $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ око Ox осе.*

Решење. Узимајући параметарске једначине елипсе $x = a\cos t, y = b\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, добија се

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt.$$

С обзиром на симетричност криве у односу на осу Oy следи

$$S = 4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}dt = 4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}dt,$$

$$= 4\pi b \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t} d(\cos t) = 4\pi ab\varepsilon \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - z^2} dz,$$

где је $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ексцентрицитет елипсе. Стављајући у последњем интегралу $z = \dfrac{\sin u}{\varepsilon}$, добија се

$$S = \frac{4\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{\arcsin \varepsilon} \cos^2 u du = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \cdot \left(\arcsin \varepsilon + \varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}\right),$$

$$= \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\left(\arcsin \varepsilon + \varepsilon \frac{b}{a}\right) = 2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}.$$

△

Пример 66. *Извести формулу за површину торуса који се добија ротацијом круга* $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ *око* Ox *осе, при чему је* $a > r$.

Решење. Површина торуса се добија сабирањем површина тела која настају када се два одговарајућа лука круга обрћу око Ox осе.

$$(y - a)^2 = r^2 - x^2,$$

Одавде ће бити изражено y.

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Извод функције y једнак је

$$y' = \mp \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Сада се може уврстити функција y у формулу за израчунавање површине ротационог тела.

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx + 2\pi \int_{-r}^{r} (a - \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx.$$

Како је у питању парна функција (дакле, симетрична у односу на Oy осу), добија се следећа једнакост:

$$S = 4\pi \int_{0}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx + 4\pi \int_{0}^{r} (a - \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx.$$

Збир ова два интеграла биће представљен као интеграл збира и тада се добија следеће:

$$S = 4\pi \int_0^r 2 \cdot \frac{ar}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 8\pi ar \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 8\pi ar \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r.$$

Одавде се добија да је површина торуса једнака

$$S = 4\pi^2 ar.$$

△

6 Примена интеграла у животу

Одређени и неодређени интеграл имају широку примену у многим природним и друштвеним наукама, као и у свакодневном животу. Многе реалне ситуације могуће је свести на одговарајући математички модел и на тај начин их решити. Већ су наведени примери примене интеграла у геометрији - израчунавање површина, запремине и дужине. Такође, интеграли имају велику примену у физици пре свега, затим у статистици, економији, биологији, ваздухопловству. За конструисање првих пројектила V-1 и V-2 током Другог светског рата неопходни су били одговарајући прорачуни који су у себи садржали доста интегралног рачуна.

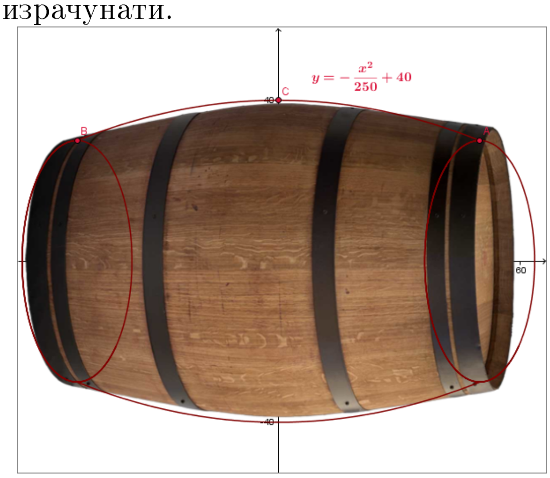
6.1 Рачунање запремине

Пример 67. *Полупречник винског бурета је* $30cm$ *при врху, а полупречник бурета на средини је* $40cm$. *Висина бурета је* $1m$. *Колика је запремина бурета под претпоставком да је бочни лук бурета парабола.*

Решење. Винско буре нема облик ваљка или купе чију запремину је могуће израчунати по формули, па ће оно бити представљено преко математичког модела и биће примењен одређени интеграл ради рачунања запремине. Буре ће бити окренуто на страну и биће израчуната једначина параболе која представља бочни лук бурета. Та парабола има максимум у тачки $(0,40)$ и пролази кроз тачке $(50,30)$ и $(-50,30)$. Једначина параболе је $y = ax^2 + bx + c$. Како наведене тачке припадају параболи, оне морају задовољавати једначину параболе. Уколико се уврсте координате тачака у једначину добија се систем једначина из ког ће бити израчунате вредности константи a, b и c. Систем који се том приликом добија је

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c &= 40 \\ 2500a + 50b + c &= 30 \\ 2500a - 50b + c &= 30. \end{aligned}$$

Решења овог система су $a = -\frac{1}{250}, b = 0, c = 40$. Дакле, тражена парабола има једначину $y = -\frac{x^2}{250} + 40$. Када ова парабола ротира око Ox осе, између тачака $(-50,30)$ и $(50,30)$ добија се обртно тело које одговара винском бурету чију запремину треба израчунати.



Слика 71: *Винско буре, скица бурета настала ротацијом око осе* Ox

Биће примењена формула за рачунање запремине обртног тела.

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{-50}^{50} \left(-\frac{x^2}{250} + 40\right)^2 dx = 2\pi \int_0^{50} \left(\frac{x^4}{62500} - \frac{80x^2}{250} + 1600\right) dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^5}{312500} - \frac{80x^3}{750} + 1600x\right)\Bigg|_0^{50} = 425162cm^2 = 425,162l \approx 425,2l.$$

△

На сличан начин може се израчунати запремина лубенице. Лубеница је сфероидног облика, дакле, може се представити као елипса која ротирањем око осе Ox формира обртно тело, тј. сфероид. Запремина сфероида је већ израчуната, па ако се знају дужине дуже и краће полуосе елипсе у хоризонталном пресеку лубенице могуће је израчунати њену површину.

Интегрални рачун, поред математике, има и велику примену у физици. Помоћу интеграла могуће је наћи центар масе крутог тела и његов момент инерције. Такође, могуће је и израчунати пређени пут неког тела, рад променљиве силе и притисак. Овде ће бити приказано на који начин је то могуће урадити и биће дати примери.

6.2 Момент инерције

Момент инерције је мера отпора тела које ротира и добија се као производ масе тела и полупречника ротације на квадрат тј.

$$I = m \cdot d^2.$$

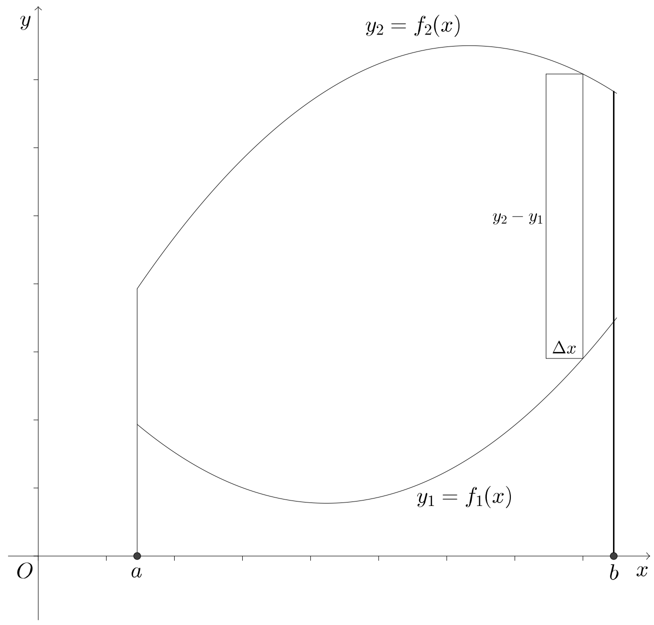
Уколико треба израчунати момент инерције за групу тела различитих маса $m_1, m_2, \ldots, m_n$ који ротирају око тачке на удаљености $d_1, d_2, \ldots, d_n$ респективно, тада је момент инерције једнак

$$I = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \ldots + m_n d_n^2.$$

Ако су све тачке на истој удаљености од центра ротације тада је момент инерције

$$I = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) R^2,$$

где је R полупречник ротације. Ове формуле могуће је применити када се тражи момент инерције равног лика. Али, шта се дешава када је потребно наћи момент инерције неке криволинијске површи? Нека је дата криволинијска површ која ротира око осе Oy. На датој површи биће уочена подела са описаним и уписаним правоугаоницима.



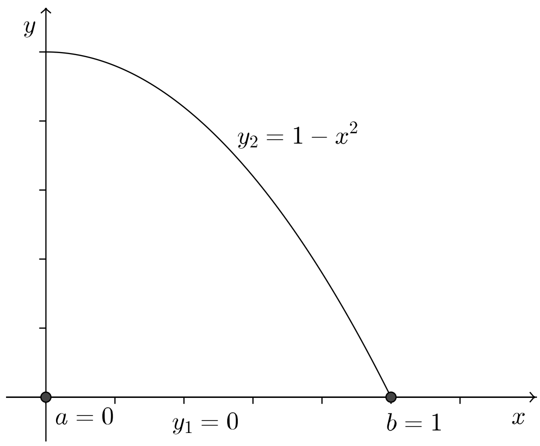
Слика 72: *Тело које ротира око осе Oy*

Сваки карактеристични правоугаоник има ширину Δx, а висину $y_2 - y_1$, па је његова површина $(y_2 - y_1)\Delta x$. Ако је k јединица масе по површини, онда сваки карактеристични правоугаоник има масу $k(y_2 - y_1)\Delta x$. Момент инерције за сваки правоугаоник је $[k(y_2 - y_1)\Delta x] \cdot x^2$, јер је сваки правоугаоник на удаљености x од осе Oy, па је x полупречник ротације. Одавде се може наћи момент инерције за све типичне правоугаонике. Тај момент инерције представља Дарбуову суму, која је уколико је подела довољно ситна тј. ако $\lambda(P) \longrightarrow 0$ једнака

$$I_y = k \int_a^b x^2(y_2 - y_1)dx.$$

Пример 68. *Наћи момент инерције за криву $y = 1 - x^2$ у првом квадранту која ротира око Ox осе.*

Решење. За почетак ће бити скициран график функције па ће се израчунати момент инерције.



Слика 73: *Крива за коју се тражи момент интерције*

Границе интеграције су $a = 0$ и $b = 1$, а горња функција је $y_2 = 1 - x^2$, док је доња $y_1 = 0$. Дакле, момент инерције је

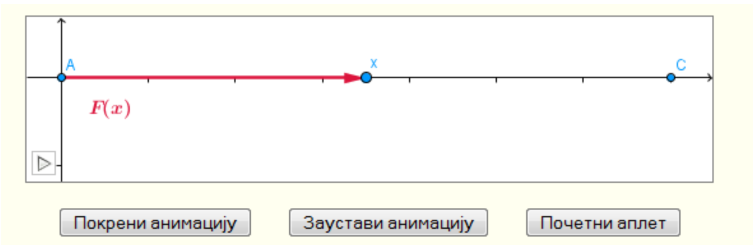
$$I = k\int_0^1 x^2((1-x^2)-0)dx = k\int_0^1 (x^2-x^4)dx =$$

$$= k\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = k\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{2k}{15}.$$

$\triangle$

6.3 Рад променљиве силе

Нека променљива сила интензитета $F(x)$ делује на материјалну тачку на путу AC и нека је функција F непрекидна. Правац и смер те силе су стални, док је интензитет променљив и зависи од растојања x између нападне тачке силе и тачке A. Потребно је израчунати рад те силе на путу од тачке a до тачке b.

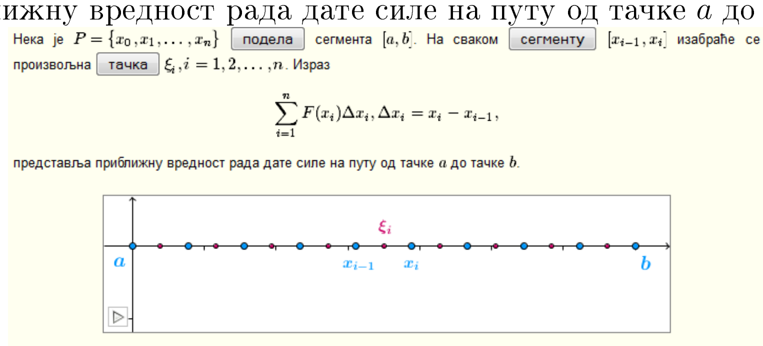


Слика 74: *Аплет на којем је илустрован рад силе на интервалу*

Нека је $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ подела сегмента $[a, b]$. На сваком сегменту $[x_{i-1}, x_i]$ потребно је изабрати произвољну тачку $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Израз

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Delta x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

представља приближну вредност рада дате силе на путу од тачке a до тачке b.



Слика 75: *Аплет на којем је илустровано креирање поделе са истакнутим тачкама*

Рад силе интензитета $F(x)$ се онда на том путу дефинише као

$$\lim_{\lambda(P)\longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx.$$

<u>**Хуков закон за опруге:**</u> Сила F потребна да истезање (или сабијање) опруге x варира од њене нормалне дужине до дужине пропорционалне са x. Дакле,

$$F = kx.$$

Пример 69. *Колики рад мора бити извршен на опрузи да би се она смањила са дужине* $1m$ *до дужине* $0,75m$*, ако је константа истезања* $k = 16N/m$*?*

Решење. Из Хуковог закона се може закључити да је $F = 16x$. Пређени пут опруге је $1m - 0,75m = 0,25m$. Према томе, уложени рад износи

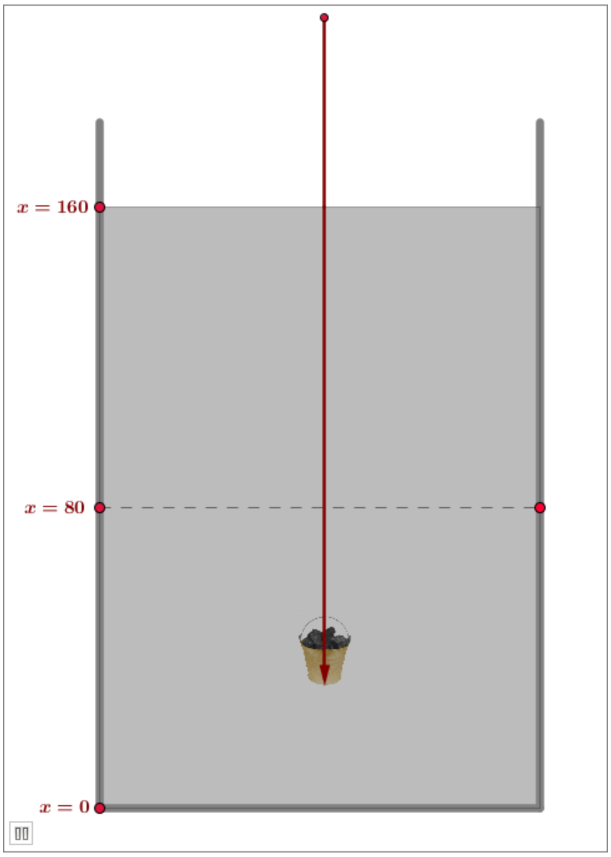
$$A = \int_0^{0.25} 16x dx = 8x^2|_0^{0,25} = 0,5N \cdot m.$$

△

Пример 70. *Кабл тежине* $30N/m$ *прикачен је за кофу са угљем тежине* $3600N$*. Кофа се подиже са дна рударског окна дубине* $160m$*. Колики рад је потребно уложити да би се подигла кофа*
а) од дна до половине окна;
б) од половине окна до врха;
в) од дна до врха.

Решење. За почетак потребно је наћи колика сила је потребна да би се извршио тражени задатак. У овом случају, сила представља тежину кофе и кабла у било ком положају у окну. Нека је x тренутни положај кофе. На дну окна, $x = 0$, на средини $x = 80$, а на врху $x = 160$. Било који положај кофе у окну може се означити са $160 - x$. Дакле,

$$F(x) = 30(160 - x) + 3600 = 8400 - 30x.$$



Слика 76: *Аплет на којем је илустровано кретање кофе у окну*

а) Како се кофа подиже са дна до половине окна, границе интеграције ће ићи од 0 до 80.

$$\int_0^{80} F(x)dx = \int_0^{80} (8400 - 30x)dx = 8400x - 15x^2|_0^{80} = 576000Nm.$$

б) Кофа се подиже од половине окна до врха, па ће границе интеграције ићи од 80 до 160.

$$\int_{80}^{160} F(x)dx = \int_{80}^{160} (8400 - 30x)dx = 8400x - 15x^2|_{80}^{160} = 384000Nm.$$

в) Кофа се подиже од дна до врха окна, па границе интеграције иду од 0 до 160.

$$\int_0^{160} F(x)dx = \int_0^{160} (8400 - 30x)dx = 8400x - 15x^2|_0^{160} = 960000Nm.$$

$\triangle$

6.4 Занимљиви задаци

Пример 71. *Стопа раста једног типа биљних ћелија изражена у стотинама је C и представљена је следећим моделом*

$$\frac{dC}{dt} = 4\sqrt{t+1},$$

где је t време мерено у данима. Када је $t = 0, C = 9$, што изражава почетни тренутак.
а) Наћи функцију која изражава број ћелија.
б) Наћи број ћелија и одговарајућу стопу раста када је $t = 5$.

Решење. а) Потребно је наћи функцију C. Како је дат диференцијал те функције по промењљивој t, биће извршена интеграција да би се нашло чему је C једнако. Дакле,

$$C = \int 4\sqrt{t+1}dt = 4\int \sqrt{t+1}dt = \frac{8}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Познато је да је у тренутку $t = 0$, број ћелија једнак $C = 9$. Одавде је

$$9 = \frac{8}{3} \cdot 1^{3/2} + c,$$

одакле је $c = \dfrac{19}{3}$. Сада је

$$C = \frac{8}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{19}{3}.$$

б) Број ћелија у тренутку $t = 5$ биће

$$C = \frac{8}{3}(5+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{19}{3} \approx 46.$$

$\triangle$

Пример 72. *Популација бактерија има раст P изражен са*

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3000}{1+0,25t},$$

где је t време мерено у данима. Кад је $t=0$ популација бактерија је 1000.
а) Наћи модел популације P под датим условима.
б) Колика ће бити популација бактерија након три дана?

Решење. а) Као и у претходном примеру, биће извршена интеграција.

$$P = \int P dt = \int \frac{3000}{1+0,25t} dt = 3000 \cdot 4 \ln|1+0,25t| + c = 12000 \ln|1+0,25t| + c.$$

Познато је да популација броји 1000 бактерија у почетном тренутку.

$$1000 = 12000 \ln(1 + 0,25 \cdot 0) + c,$$

одакле је $c = 1000$. Дакле,

$$P = 12000 \ln(1 + 0,25t) + 1000.$$

б) Након три дана је $t = 3$, па ће број бактерија бити

$$P = 12000 \ln(1 + 0,75) + 1000 \approx 7715.$$

$\triangle$

Пример 73. *Концентрација лека у изражена у милиграмима по литру у крви пацијента после t сати може бити представљена преко формуле*

$$y = 500e^{-0,4t}.$$

Наћи просечну количину лека током првих 5 сати пошто је лек примљен.

Решење. Како се тражи просечна количина лека у крви пацијента, потребно је применити прву теорему о средњој вредности која је раније наведена. Како се траже резултати за временски интервал од 5 сати, биће $t \in [0,5]$, па је

$$\frac{1}{5}\int_0^5 500e^{-0,4t} dt = 100 \int_0^5 e^{-0,4t} dt = 100(-2,5e^{-0,4t})|_0^5 \approx 216,2.$$

Дакле, просечна концентрација лека у крви пацијента ће бити 216,2 милиграма по милилитру након 5 сати. $\triangle$

Пример 74. *У зависности од годишњих доба током године долази до промене дужине дана. Ако је t број дана након пролећне равнодневнице, дужину дана је могуће представити преко периодичне функције*

$$f(t) = 12 + 4 \sin \frac{\pi t}{182}.$$

Наћи средњу вредност дужине дана током пролећа и лета.

Решење. Под претпоставком да пролеће и лето трају укупно половину године, то износи 182 дана. Сада се може применити теорема о средњој вредности.

$$D = \frac{1}{182}\int_0^{182} f(t)dt = \frac{1}{182}\int_0^{182}(12 + 4\sin\frac{\pi t}{182})dt =$$

$$= \frac{1}{182}\cdot 12t\Big|_0^{182} - \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi t}{182}\Big|_0^{182} = 12 + \frac{8}{\pi}.$$

Просечна дужина дана током пролећа и лета износи $12 + \dfrac{8}{\pi} \approx 14,55$ сати. $\triangle$

7 Закључак

Последњих година, све више се говори о осавремењивању наставе математике. Рачунари и интернет представљају нашу свакодневицу, па је природно да се говори и о њиховој примени у настави. Програмски пакет ГеоГебра, као што је речено у уводу приказаног мастер рада, представља динамички софтвер који омогућава интерактивно учење математике.

У овом раду је приказана визуелизација неодређених и одређених интеграла у програмском пакету ГеоГебра, као и примена интеграла у геометрији и наукама. Визуелизација градива је веома битна, јер она омогућава да се многи апстрактни појмови приближе ученицима и студентима. Аплети креирани помоћу ГеоГебре су интерактивни - омогућавају да корисник учествује у промени података везаних за аплет, а самим тим те промене утичу и на изглед аплета. У интернет презентацији овог мастер рада постоје и аплети који су повезани са дугмићима у тексту. Притиском на дугме долази до исцртавања одговарајућих елемената на аплету. Овај начин приказивања неког градива је изузетно користан, јер корисник док чита текст истовремено учествује у креирању слике везане за текст, уместо да посматра већ формирану слику и да тумачи податке на њој. На тај начин се само градиво које је овако представљено боље разуме и брже и лакше памти.

Настава математике се чак и данас, у 21. веку, обавља уз помоћ креде и табле, најчешће због недостатка времена. На квалитет наставе математике би позитивно утицало када би се ГеоГебра почела користити у склопу наставе, као програм помоћу кога се могу успешно визуелизовати математички садржаји. Како је ГеоГебра аплете могуће уградити у веб страницу, ученицима се пружа могућност да од куће приступе аплетима који ће бити приказани на часу и да их на тај начин и сами проуче и додатно се посвете том садржају. Професорима математике, са друге стране, ова особина пружа могућност да своје часове учине занимљивијим, да прикажу на лепши, прегледнији начин градиво које понекад није могуће адекватно представити на табли.

Како се тренутно развија и верзија ГеоГебре која ће омогућити креирање тродимензионалних објеката, овај програм ће временом бити све значајнији у настави математике, како у основним и средњим школама, тако и на факултету. Било би корисно када би професори у школама почели активније да користе предности које пружа овај програм, јер би тако своје часове учинили занимљивијим и јаснијим. Такође, било би веома корисно да и ученици у основним и средњим школама почну да користе програм ГеоГебра, да и сами у њему креирају објекте, јер ће на тај начин боље уочити неке особине тих објеката које креирају, као и то шта се дешава променом неких података на конструкцији. Било би добро у склопу часова информатике покренути рад у ГеоГебри. На тај начин би била омогућена и интердисциплинарност на којој се све више инсистира, односно, повезаност часова информатике и математике.

Литература

[1] Аднађевић, Д., Каделбург, З.: Математичка анализа I, осмо издање, Математички факултет, Београд, 2008. година

[2] Богославов, В. Т.: Збирка решених задатака из математике 4, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2002. година

[3] Божић, М.: Преглед историје и филозофије математике, Завод за уџбенике, Београд, 2010. година

[4] Ивановић, Ж., Огњановић, С.: Збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа, Круг, Београд, 2003. година

[5] Каделбург, З., Мићић, В., Огњановић, С.: Анализа са алгебром, уџбеник са збирком задатака за 4. разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 2003. година

[6] Кечкић, Ј.: Математика са збирком задатака за 4. разред гимназије, Самостална издавачка агенција ,,Кечкић", Београд, 2006. година

[7] Љашко, И.И., Бољарчук, А.К., Гај, Ј.Г., Головач, Г.П.: Збирка задатака из математичке анализе 1, увод у анализу, извод, интеграл, Наша књига, Београд, 2007. година

[8] Сајт ГеоГебре: http://www.geogebra.org/about, приступљено дана 06.10.2013.

[9] ГеоГебра Центар Београд: http://www.geogebra.matf.bg.ac.rs/ приступљено дана 06.10.2013.

[10] О калкулусу на сајту Википедије: http://en.wikipedia.org/wiki/Calculus, приступљено дана 06.10.2013.

[11] О интегралима на сајту Универзитета у Јути, одсек за грађевину: http://www.eng.utah.edu/ cs5961/Resources/calculus.pdf, приступљено дана 26.03.2014.

[12] О калкулусу: http://apcentral.collegeboard.com/apc/members/features/2015.html, приступљено дана 26.03.2014.

[13] Историја калкулуса: http://www.andrewsaladino.com/calculus/history.html, приступљено дана 26.03.2014.

[14] Примена интеграла, сајт за интерактивно учење математике: http://www.intmath.com/applications-integration/applications-integrals-intro.php приступљено дана 19.08.2014.

[15] Примена интеграла: http://college.hmco.com/shared/pdfs/9780618962594_ch06.pdf приступљено дана 19.09.2014.

[16] Примена калкулуса у физици: http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI/Work.aspx приступљено дана 19.09.2014.

[17] Теорема о средњој вредности, сајт Универзитета Британска Колумбија, одсек за математику: http://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math101/notes/applications/average.html приступљено дана 21.09.2014.